Resoluções

Capítulo 17

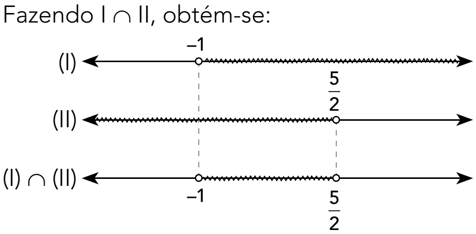
Sistema cartesiano

ATIVIDADES PARA SALA

01 Um ponto do 4º quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa. Assim, para que o ponto A esteja no 4º quadrante, deve-se ter: x + 1 > 0 e 2x – 5 < 0.

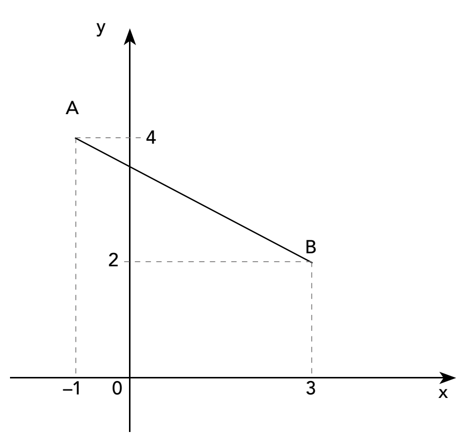
Resolvendo o sistema: $\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \quad \text{(I)} \\ 2x-5<0 \Rightarrow 2x<5 \Rightarrow x<\dfrac{5}{2} \quad \text{(II)} \end{cases}$

Fazendo I ∩ II, obtém-se:



Portanto, $x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \dfrac{5}{2}$

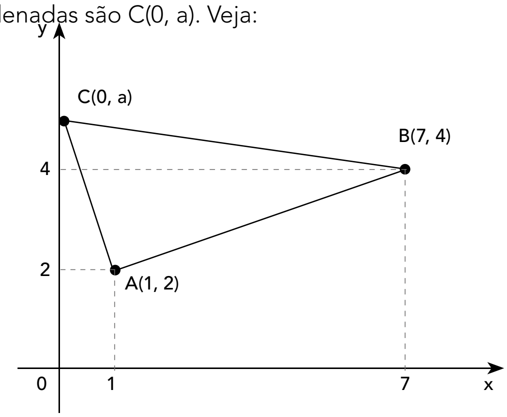
02 Fazendo uma figura, tem-se:



$$d(A, B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(3+1)^2+(2-4)^2}$$
$$d(A, B) = \sqrt{16+4}$$
$$d(A, B) = \sqrt{20}$$
$$d(A,B) = 2\sqrt{5}$$

A distância procurada é $d = 2\sqrt{5}$.

03 Se o ponto C pertence ao eixo das ordenadas, suas coordenadas são C(0, a). Veja:



Como o triângulo ABC é retângulo em A, pode-se usar o Teorema de Pitágoras: $[d(B, C)]^2 = [d(A, C)]^2 + [d(A, B)]^2$.

Substituindo os valores:

$$(\sqrt{(7-0)^2+(4-a)^2})^2 = (\sqrt{(1-0)^2+(2-a)^2})^2 + (\sqrt{(1-7)^2+(2-4)^2})^2$$

Simplificando, tem-se:

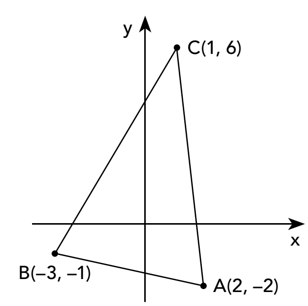
$7^2 + (4 - a)^2 = 1^2 + (2 - a)^2 + (-6)^2 + (-2)^2 \Rightarrow$

$49 + 16 - 8a + a^2 = 1 + 4 - 4a + a^2 + 36 + 4 \Rightarrow$

$65 - 8a = 45 - 4a \Rightarrow a = 5$

Portanto, as coordenadas do ponto C são (0, 5).

04 Fazendo uma figura:

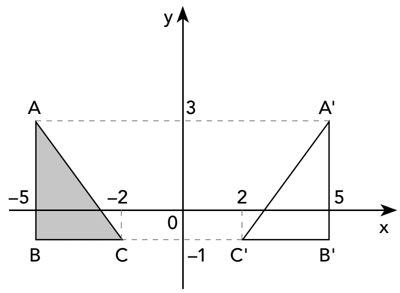


Determinando o comprimento dos lados do triângulo:

$$d(A, B) = \sqrt{(-3-2)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$
$$d(A, C) = \sqrt{(1-2)^2+(6+2)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$
$$d(B, C) = \sqrt{(1+3)^2+(6+1)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

Como d(A, C) = d(B, C), o triângulo dado tem dois lados congruentes. Logo, é isósceles.

05 Os vértices A', B' e C' são simétricos dos vértices do triângulo ABC em relação ao eixo das ordenadas.



Observe as coordenadas dos vértices desses triângulos:
A(–5, 3) → A'(5, 3)
B(–5, –1) → B'(5, –1)
C(–2, –1) → C'(2, –1)

ATIVIDADES PROPOSTAS

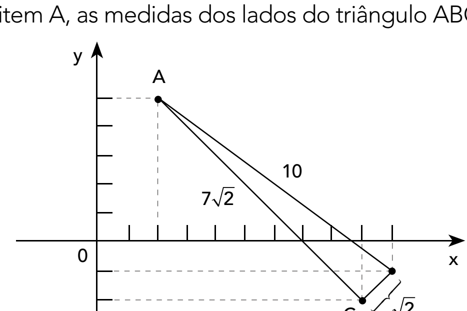
01 $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(5-(-3))^2 + (-4-2)^2}$
$\therefore AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \therefore AB = \sqrt{100} \therefore AB = 10$

02 a) Tem-se:

$$AB = \sqrt{(10-2)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$
$$AC = \sqrt{(9-2)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{(10-9)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

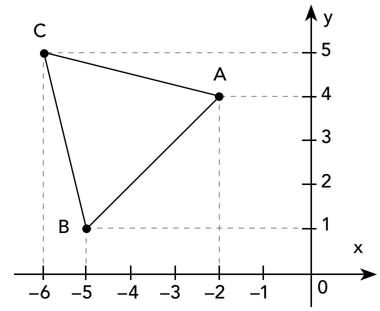
Logo, o perímetro do triângulo ABC é:
$AB + AC + BC = 10 + 7\sqrt{2} + \sqrt{2} = 10 + 8\sqrt{2}$

b) Um triângulo é retângulo se, e somente se, o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Foram calculadas, no item A, as medidas dos lados do triângulo ABC:



O maior lado mede 10 unidades, e os outros lados medem $7\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
Observando que $10^2 = (7\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ é uma sentença verdadeira, conclui-se que o triângulo é retângulo.

03



B

Faz-se necessário calcular, primeiramente, as medidas dos lados do triângulo ABC:

$$d(A, B) = \sqrt{(-5+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$d(A, C) = \sqrt{(-6+2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$d(B, C) = \sqrt{(-6+5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

Como d(A, C) = d(B, C), o triângulo ABC é isósceles.

04 Para ser triângulo retângulo, o quadrado de um lado deve ser igual à soma dos quadrados dos outros dois.

Veja:

$$d(A, B) = \sqrt{(6+1)^2+(1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \Rightarrow (\sqrt{65})^2 = 65$$
$$d(A, C) = \sqrt{(2+1)^2+(-5+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow (\sqrt{13})^2 = 13$$
$$d(B, C) = \sqrt{(2-6)^2+(-5-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \Rightarrow (\sqrt{52})^2 = 52$$

Como 65 = 13 + 52, pode-se afirmar que o triângulo ABC é retângulo em C.

05 Se o triângulo ABC é retângulo em $\hat{B}$, então o lado AC é a hipotenusa. Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

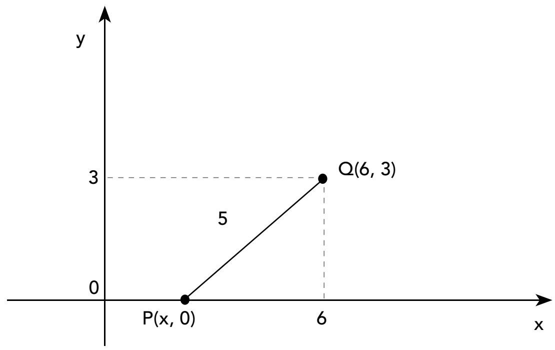
Assim:

$$\overline{AC}^2 = (3-2)^2 + (-1-y)^2 = 1 + 1 + 2y + y^2 = y^2 + 2y + 2$$
$$\overline{AB}^2 = (1-2)^2 + (-4-y)^2 = 1 + 16 + 8y + y^2 = y^2 + 8y + 17$$
$$\overline{BC}^2 = (3-1)^2 + (-1+4)^2 = 4 + 9 = 13$$

Logo, $y^2 + 2y + 2 = y^2 + 8y + 17 + 13 \Rightarrow 6y = -28 \Rightarrow y = -\frac{14}{3}$

06 a) Todo ponto do eixo Ox possui ordenada zero. Logo, o ponto P é da forma P(x, 0). Deve-se ter PQ = 5, ou seja:

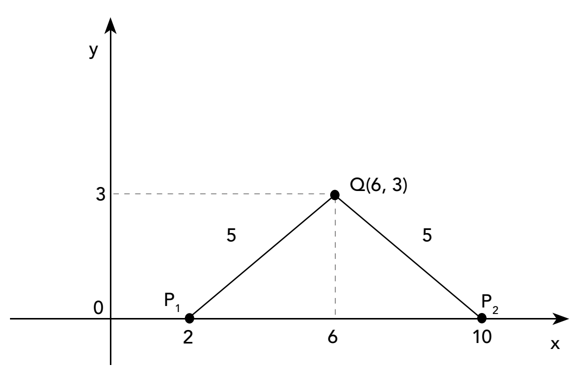
$$\sqrt{(x-6)^2+(0-3)^2}=5$$



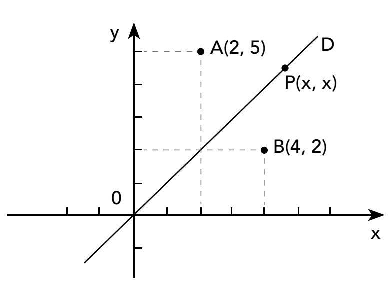
Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, tem-se:

$(x-6)^2+(0-3)^2=25 \Rightarrow x^2-12x+36+9=25 \Rightarrow$
$x^2-12x+20=0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtém-se x = 2 ou x = 10. Assim, existem dois pontos P(x, 0) que satisfazem a condição do enunciado. São eles: $P_1(2, 0)$ e $P_2(10, 0)$.



b) Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares possui a abscissa igual à ordenada. Logo, o ponto P é da forma P(x, x).



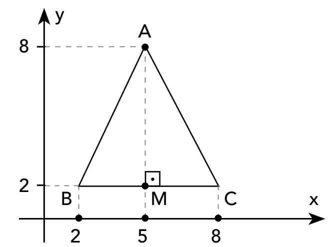
$$\cancel{(x-2)^2}+(x-5)^2=(x-4)^2+\cancel{(x-2)^2}$$

$$\cancel{x^2}-10x+25=\cancel{x^2}-8x+16$$

$$2x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

Logo, $P\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

07



Pelo esboço do gráfico, já se pode ver que d(A, M) = 6. Resolvendo algebricamente: $M(x_M, y_M)$ é ponto médio de $\overline{BC}$. Então:

$$x_M=\frac{2+8}{2}=5 \qquad y_M=\frac{2+2}{2}=2$$

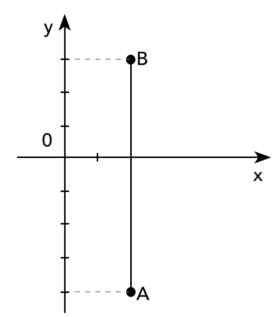
Logo, M(5, 2).

A altura relativa ao lado BC é o segmento AM.

Aplicando a fórmula, tem-se:

$$d(A, M)=\sqrt{(5-5)^2+(8-2)^2}=\sqrt{0+36}=\sqrt{36}=6$$

08



Seja $C=(x_C, y_C)$, tem-se a seguinte equação: $\overline{AC}=\overline{BC}$

$$\sqrt{(x_C-2)^2+(y_C+4)^2}=\sqrt{(x_C-2)^2+(y_C-3)^2} \Rightarrow$$

$$\cancel{(x_C-2)^2}+(y_C+4)^2=\cancel{(x_C-2)^2}+(y_C-3)^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{y_C^2}+8y_C+16=\cancel{y_C^2}-6y_C+9 \Rightarrow$$

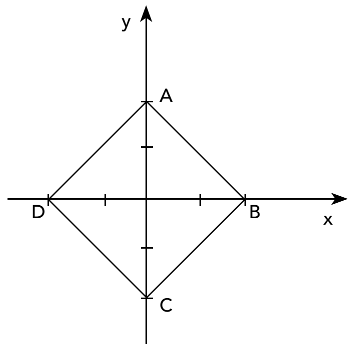
$$14y_C=-7 \Rightarrow$$

$$y_C=-\frac{1}{2}$$

$$x_C \neq 2$$

$$y_C=-\frac{1}{2}$$

09



Aplicando a distância entre dois pontos:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 \Rightarrow$ ΔABD é retângulo em A

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow$ ΔABC é retângulo em B

$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 \Rightarrow$ ΔBCD é retângulo em C

$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow$ ΔACD é retângulo em D

Logo, ABCD é um quadrado.

$$d_{\overline{CB}} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(0-2)^2 + (-2 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$
$$d_{\overline{CB}} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \text{medida do lado}$$

10 Seja D = (x_D, y_D). Se ABCD é quadrado, deve-se ter:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{CD}^2 \Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{(-2+2)^2 + (4+2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_D+8)^2 + (y_D+2)^2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$(x_D+8)^2 + (y_D+2)^2 = 36 \quad \text{(I)}$$
$$\overline{AC} = \overline{BD} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{(-8+2)^2 + (-2-4)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_D+2)^2 + (y_D+2)^2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$(x_D+2)^2 + (y_D+2)^2 = 72 \quad \text{(II)}$$

Fazendo (II) – (I):

$$(x_D+2)^2 - (x_D+8)^2 + \cancel{(y_D+2)^2} - \cancel{(y_D+2)^2} = 36 \Rightarrow$$
$$-12x_D - 60 = 36 \Rightarrow$$
$$-12x_D = 96 \Rightarrow$$
$$x_D = -8$$
$$y_D = 4 \quad \text{(I)}$$

Logo, D = (–8, 4).