Resoluções

Capítulo 2

Progressão aritmética II

Desafio

a) $S_{12} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{12} = \frac{(80 + 410) \cdot 12}{2}$

$S_{12} = \frac{490 \cdot 12}{2}$

$S_{12} = 2\,940$

Ele teria juntado R$ 2 940,00.

b) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_{12} = a_1 + 11r$

$410 = 80 + 11r$

$330 = 11r$

$r = 30$

Fevereiro: 80 + 30 = 110
Março: 110 + 30 = 140
Abril: 140 + 30 = 170
Maio: 170 + 30 = 200
Junho: 200 + 30 = 230
Julho: 230 + 30 = 260
Agosto: 260 + 30 = 290
Setembro: 290 + 30 = 320
Outubro: 320 + 30 = 350
Novembro: 350 + 30 = 380

ATIVIDADES PARA SALA

01 **C**

Considerando a P.A. $(10, \underbrace{\ldots}_{7\text{ termos}}, 98)$, tem-se o seguinte:

I. $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_9 = 98 \end{cases} | \Rightarrow a_9 = a_1 + 8 \cdot r \Rightarrow 98 = 10 + 8 \cdot r \Rightarrow r = 11;$

II. Posição do termo central $= \frac{1+9}{2} = 5;$

III. $a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_5 = 10 + 44 \Rightarrow a_5 = 54$ (termo central).

02 $34 = 12 + (n - 1) \cdot 0{,}5 \Rightarrow n = 45$. Deve-se interpolar 43 termos.

03 **A**

Como $\mathbf{a_7}$ é o termo médio da progressão aritmética, segue-se que

$$S_n = \frac{\overbrace{(a_1 + a_{13})}^{a_7} \cdot 13}{2}$$

$78 = a_7 \cdot 13$

$a_7 = 6.$

04 **A**

Seja **n** o número de meses decorridos até que os dois irmãos venham a ter o mesmo capital. Tem-se que

$$50 \cdot n = \left(5 + \frac{n-1}{2} \cdot 5\right) \cdot n \Rightarrow 10 - 1 - \frac{n-1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 19,$$

ou seja, um ano e sete meses, o que equivale a pouco mais de um ano e meio.

05 **A**

$n = \frac{(1 + 2\,013) \cdot 2\,013}{2}$

$n = \frac{2\,014 \cdot 2\,013}{2}$

$n = 1\,007 \cdot 2\,013$

n será um valor em que o algarismo das unidades é 1.

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 **B**

Do enunciado, tem-se o seguinte:

I. P.A. $\begin{cases} b_1 = 18 \\ b_7 = 96 \end{cases} \Rightarrow b_7 = b_1 + 6r \Rightarrow 96 = 18 + 6r \Rightarrow r = 13$

II. $\begin{cases} b_4 = a_3 \\ b_4 = b_1 + 3r \end{cases} \Rightarrow a_3 = 18 + 3 \cdot (13) \Rightarrow a_3 = 57$

02 $\frac{3}{\cancel{4}} = \frac{11}{\cancel{4}} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{4}}\right) \Rightarrow 3 = 11 - n + 1 \Rightarrow n = 9$

Assim, 9 – 2 = 7.
Devem ser inseridos 7 meios aritméticos.

03 **E**

Os números inteiros, compreendidos entre 100 e 400, que possuem o algarismo das unidades igual a 4 formam uma P.A. de razão 10. (104, 114, 124, 134, ..., 384, 394).

Determinando o número **n** de termos dessa P.A., tem-se
$394 = 104 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow n = 30.$

Calculando, agora, a soma destes 30 termos, tem-se

$$\frac{(104 + 394) \cdot 30}{2} = 7470.$$

04 **E**

Até a 42ª linha, tem-se:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 40 + 41 + 42 = \frac{(1 + 42) \cdot 42}{2} = 903 \text{ termos.}$$

Portanto, o primeiro elemento da 43ª linha será o 904º número natural ímpar. Então:

$a_{904} = 1 + 903 \cdot 2 = 1807.$

05 **A**

Tem-se

I. $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = 150 \Rightarrow a_1 + a_{15} = 20$

II. $a_8 + a_8 = a_1 + a_{15}$ (note as somas dos índices iguais)
$\Rightarrow 2a_8 = 20 \Rightarrow a_8 = 10$

06 $\begin{cases} a_2 + a_5 = 17 \Rightarrow \\ a_3 + a_7 = 26 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 5r = 17 \\ 2a_1 + 8r = 26 \end{cases}$

$3r = 9$

$r = 3$ e $a_1 = 1$

$a_{15} = 1 + 14 \cdot 3 = 43 \Rightarrow S_{15} = \dfrac{(1 + 43) \cdot 15}{2} = 330$

07 (4, 9, 14, ...)

$a_n = 4 + 5 \cdot (n - 1)$

$S_n = \dfrac{(4 + 5n - 1) \cdot n}{2} = 99 \Rightarrow (3 + 5n) \cdot n = 198$

$5n^2 + 3n - 198 = 0$

$\Delta = 9 + 3960 = 3969 \Rightarrow n = \dfrac{-3 \pm 63}{10} \begin{cases} n_1 = 6 \\ n_2 = -6{,}6 \end{cases}$ (não convém)

Serão necessários 6 minutos.

08 **D**

As quantidades dos elementos, em cada linha, também formam uma P.A. (1, 3, 5, 7, ...).

Total de elementos da linha 9: $x = 1 + 8 \cdot 2 = 17$

Total de elementos até a linha 9: $S = \dfrac{(1 + 17) \cdot 9}{2} = 81$

A sequência (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ...) é uma P.A. de razão 3.

Portanto, o primeiro elemento da linha 10 será o octogésimo segundo elemento da P.A. acima.

$a_{82} = 1 + 81 \cdot 3 = 244$

09 **B**

As multas relacionadas formarão uma P.A. de 11 termos e de razão 500 (500, 1000, 1500, ..., a_{11}).

Em que $a_{11} = 500 + 10 \cdot 500 = 5500$.

Calculando a soma dos 11 primeiros termos dessa P.A., tem-se

$$S = \frac{(500 + 5500) \cdot 11}{2} = 33000$$

10 **C**

I. $S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 130 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 26 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + a_1 + 9r = 26 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 26$

II. $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 560 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + a_1 + 19r = 56 \Rightarrow 2a_1 + 19r = 56$

A partir disso,

III. $\begin{cases} \cancel{2a_1} + 19r = 56 \\ \cancel{-2a_1} - 9r = -26 \end{cases}$

$10r = 30 \Rightarrow r = 3$

IV. $2a_1 + 9(3) = 26 \Rightarrow a_1 = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

V. $a_{50} = a_1 + 49 \cdot r \Rightarrow a_{50} = -\dfrac{1}{2} + 49 \cdot 3 \Rightarrow a_{50} = 146{,}5$

Logo,

$$S_{50} = \frac{(-0{,}5 + 146{,}5) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{146 \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = 3650$$