Módulo 7 — Tipos de funções - Função injetora, função sobrejetora, função bijetora, função composta e função inversa

Atividades para sala

01 **A**

De acordo com a peça publicitária, existe uma só ação associada a cada dia da semana. Pode-se dizer que existe, então, uma função f que associa o dia da semana à ação, ou seja, $f: A \to B$. Como cada dia da semana corresponde a uma só ação, f é injetora; e como todas as ações do conjunto B possuem associação, f é também sobrejetora. Assim, $f: A \to B$ é bijetora.

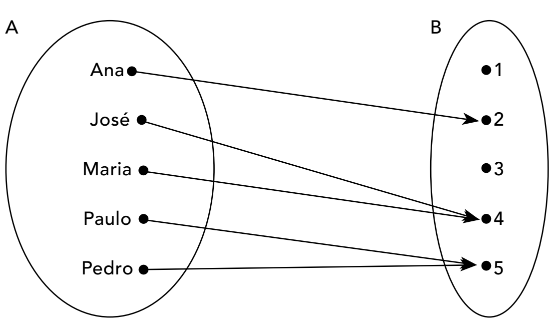
Outra resolução:

Observe que o conjunto A é constituído por 7 elementos e que o conjunto B também é formado por 7 elementos (*vide* imagem dada), sendo que para cada elemento de A existe um único elemento distinto em correspondência em B, o que caracteriza uma função bijetora ($f: A \to B$).

02 **E**

a) f(Ana) = 2 (duas letras distintas: A, N)
b) f(José) = 4 (quatro letras distintas: J, O, S, É)
c) f(Maria) = 4 (quatro letras distintas: M, A, R, I)
d) f(Paulo) = 5 (cinco letras distintas: P, A, U, L, O)
e) f(Pedro) = 5 (cinco letras distintas: P, E, D, R, O)

Assim, as associações seriam:



Note que em B os elementos 1 e 3 não estão associados a nenhum elemento do conjunto A.

Analise as alternativas:

a) (F) f não é injetora, pois f(José) = f(Maria).
b) (F) f não é sobrejetora, $\text{Im}(f) \neq \text{CD}(f)$.
c) (F) f é função.
d) (F) f(Maria) = 4.
e) (V) f(Paulo) = f(Pedro) = 5.

03 **C**

Sabe-se que, em uma função injetora, elementos distintos do domínio possuem imagens distintas, ou seja:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Logo, pode-se concluir que:

- f não é injetora, pois duas pessoas distintas podem ter a mesma idade.
- **g** é injetora, pois não existem dois países distintos com a mesma capital.
- **h** é injetora, pois dois números naturais distintos possuem os seus dobros também distintos.

04 Pela condição dada, têm-se:

$f(x) = 4x + 3$ e $g(x) = x - 4$

a) $f(g(2)) =$
$g(2) = 2 - 4 = -2$
$f(-2) = 4\,(-2) + 3 = -8 + 3 = -5$
Portanto, $f(g(2)) = -5$

b) $f\circ g(-3) = f(g(-3))$
$g(-3) = -3 - 4 = -7$
$f(-7) = 4(-7) + 3 = -28 + 3 = -25$
Portanto, $f\circ g(-3) = -25$

c) $g(g(5)) =$
$g(5) = 5 - 4 = 1$
$g(1) = 1 - 4 = -3$
Portanto, $g(g(5)) = -3$

d) $f(g(x)) =$
$f(g(x)) = 4g(x) + 3$
$f(g(x)) = 4(x - 4) + 3$
$f(g(x)) = 4x - 16 + 3$
Portanto, $f(g(x)) = 4x - 13$

05 **C**

Observando o gráfico, tem-se que

$g(1) = 0$ e $f(1) = -1$; assim, $f(0) = 1$ e $g(-1) = 0$.

Portanto, $f(g(1)) - g(f(1)) = f(0) - g(-1) = 1 - 0 = 1$.

06 Pela condição dada:

$c(p) = 0{,}5p + 1$
$p(t) = 10 + 0{,}1t^2$

a) $c(p(t)) = 0{,}5(10 + 0{,}1t^2) + 1$
$c(p(t)) = 5 + 0{,}05t^2 + 1 = 6 + 0{,}05t^2$

b) $13{,}2 = 6 + 0{,}05t^2$

$7{,}2 = 0{,}05t^2$

$$\frac{72}{1\cancel{0}} = \frac{\cancel{5}^{1}}{{}_{2}\cancel{10}\,\cancel{0}}t^2$$

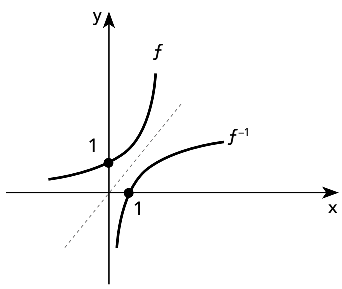
$$72 = \frac{t^2}{2}$$

$t^2 = 72 \cdot 2 = 144$

$t = \sqrt{144} = 12$ anos

07 **C**

Para obter a inversa de uma função a partir de seu gráfico, ela deve ser simétrica em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.



08 **C**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax + b$.

O valor inicial de ***f*** é a ordenada do ponto de interseção do gráfico de ***f*** com o eixo **y**, ou seja, $b = 1$.

Logo, como o gráfico de ***f*** passa pelo ponto $(-2, 0)$, tem-se que:

$0 = a \cdot (-2) + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$

Portanto, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ e sua inversa é tal que:

$x = \frac{y}{2} + 1 \Rightarrow y = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 2.$

09 **C**

Como ***f*** e **g** são inversas, então:

$f(g(x)) = g(f(x)) = x$

$f(g(2)) + g(f(3)) = 2 + 3 = 5$

Atividades propostas

01 **E**

A alternativa **E** é a única em que cada **y** é gerado por apenas um **x**, além disso, todos os elementos do conjunto de partida são utilizados. A alternativa, portanto, representa uma função injetora.

02 **D**

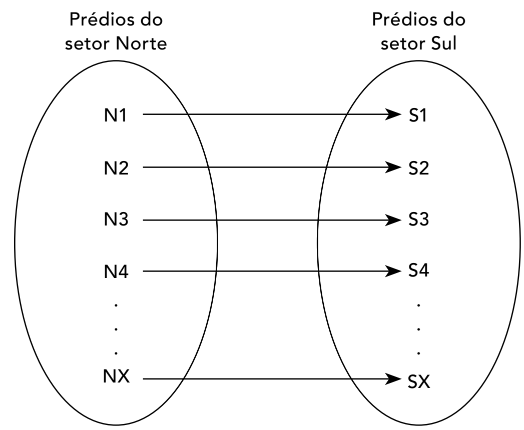
A função sobrejetora é a função em que não sobra elemento no contradomínio (conjunto de chegada).

03 **B**

Para a função ser bijetora, é necessário que seja injetora e sobrejetora.

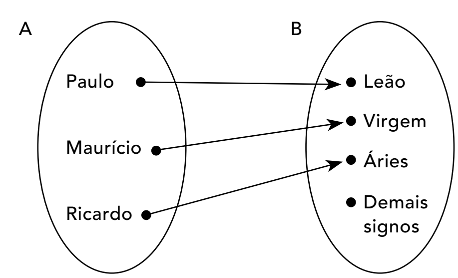
04 **C**

Observe o esquema mostrado a seguir.



Cada prédio do setor Norte tem um único correspondente distinto no setor Sul, e isso caracteriza uma função injetiva ou injetora. Considerando os prédios do setor Norte como elementos do domínio e os prédios do setor Sul como elementos do contradomínio, nota-se que todos os elementos do contradomínio são imagem de algum ponto do domínio. Logo, há a caracterização de uma função sobrejetora ou sobrejetiva. Como a função mostrada é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, tem-se, então, uma função bijetora.

05 **B**



a) (F) Representa uma função, pois cada elemento do conjunto A se associa a somente um elemento do conjunto B.

b) (V) $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

c) (F) $Im(f) \neq CD(f)$

d) (F) É injetora, mas não é sobrejetora.

e) (F) Representa uma função injetora.

06 **B**

Se ***f*** é definido por $]-\infty, \infty[$, o valor de **a** será a imagem da função e também o $\mathbf{y_v}$ da função. Assim, **a** deverá ser:

$$a = y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(4m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 1]}{4m^2} = \frac{-12m^2}{4m^2} = -3$$

07 **D**

Como a taxa de monóxido de carbono está relacionada a **p** por meio da equação c(p) = 0,5p + 1 e a variável **p** está relacionada à variável **t** pela equação p(t) = 100 + t^2, a função composta será:

$c(p(t)) = 0{,}5(100 + t^2) + 1 \Rightarrow c(p(t)) = 50 + t^2 + 1 \Rightarrow$
$c(p(t)) = 51 + t^2$

08 **C**

Dados: x: medida de cada lado de um lote; y = f(x): área de cada lote; g(x): área do terreno.

Veja que a área de cada lote é dada pela função f(x):

y = $f(x) = x^2$ (área de cada lote).

Para calcular a área de todo o terreno, deve-se saber a área de cada lote, a qual é informada pela função f(x). Como há 10 lotes, tem-se que a área do terreno será dada da seguinte maneira:

g(y) = 10 · y

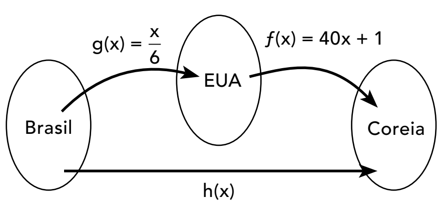
Veja que para chegar à área do terreno foi necessário utilizar a função f(x), ou seja, a função g(y) depende da função f(x). Por isso, trata-se de uma função composta.

Realizando a composição:

$g(y) = 10 \cdot y \rightarrow g(f(x)) = 10x^2$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h \text{ (função composta de } \mathbf{g} \text{ com } \mathbf{f}\text{)}"'] & x^2 \arrow[r, "g"] & 10x^2 \end{tikzcd}$$

09 **C**



$h(x) = f[g(x)]$

$h(x) = 40 \cdot \dfrac{x}{6} + 1$

$h(x) = \dfrac{20}{3} \cdot x + 1$

10 **D**

Deseja-se saber o valor de **t** para o qual se tem c(p)= 6,8. Segue que 6,8 = 0,5p + 1 ∴ p = 11,6.

Portanto, o resultado pedido é tal que $11{,}6 = 10 + 0{,}1t^2 \rightarrow t^2 = 16 \rightarrow t = 4$.

11 **D**

Dado: $\pi \cong 3{,}14$.

Para o intervalo [2,4], ***f*** é constante.

Assim, $f(f(\pi)) = f(f(3{,}14)) = f(f(2))$.

Do gráfico, tem-se que, para $x \leq 2$, ***f*** é uma função afim, do tipo $f(x) = ax + b$, e tem o ponto (0,3):

$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$, além disso:

$f(1) = 2$,

$2 = a \cdot 1 + 3 \Rightarrow a = -1$ e $f(x) = -x + 3$ para $x < 2$.

Portanto, $f(2) = -2 + 3 = 1$ e $f(f(\pi)) = f(f(2)) = f(1) = 2$.

12 **D**

Dada a função $f(t) = M \cdot \text{sen} \cdot wt$, sabe-se que o processo de respiração pode ser modelado pela função $p(t) = L - f(t + a)$. Com isso, substituindo, tem-se:

$p(t) = L - M \cdot \text{sen} \cdot w(t + a)$

Logo, a representação no gráfico terá a forma de uma onda senoidal, como em D, que obedece a uma função seno.

13 **A**

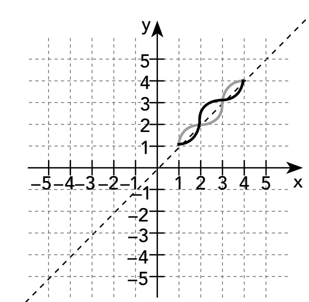
$$t = \frac{1}{V - 35} \Rightarrow t(V - 35) = 1 \Rightarrow V - 35 = \frac{1}{t} \Rightarrow$$
$$V = \frac{1}{t} + 35 = \frac{1 + 35t}{t}$$

14 **A**

$$x_{CG} = \frac{400 - 15w}{80 - 2w} \quad \Rightarrow 80x_{CG} - 2wx_{CG} = 400 - 15w$$
$$\Rightarrow 15w - 2wx_{CG} = 400 - 80x_{CG}$$
$$\Rightarrow w(15 - 2x_{CG}) = 400 - 80x_{CG}$$
$$\Rightarrow w(x_{CG}) = \frac{400 - 80x_{CG}}{15 - 2x_{CG}}$$

15 **A**

O gráfico da inversa de uma função ***f*** é simétrico ao gráfico de ***f*** em relação à reta que representa a bissetriz dos quadrantes ímpares.



16 **E**

$f(x) = \dfrac{a}{x^2}$ e $g(x) = \dfrac{b}{x}$

Então:

$$f(g(x)) = f\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{a}{\left(\frac{b}{x}\right)^2} = \frac{a \cdot x^2}{b^2}$$

17 **C**

O domínio da função **g** é o conjunto dos valores de **x** para os quais $2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$, ou seja, $D = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}\right\}$.

A função inversa de **g** é tal que:

$$y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow x = \frac{y-3}{2y+1}$$
$$\Rightarrow 2yx - y = -x - 3$$
$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-x-3}{2x-1}.$$

18 **A**

Fazendo 3 + x = y, tem-se x = y – 3.

Logo, $f(y) = f(3 - y + 3) \Rightarrow f(y) = f(6 - y) \Rightarrow f(x) = f(6 - x)$.

Considerando **a** e **b** como raízes de $f(x)$, pode-se afirmar que 6 – a e 6 – b são raízes de $f(6 - x)$.

Como $f(x) = f(6 - x)$, a soma das raízes será:
a + b + 6 – a + 6 – b = 12.