Módulo 8 — Análise combinatória III – Permutação simples, permutação com repetição e permutação circular

Atividades para sala

01 E

Começando com 1, existem 4! = 24 algarismos.
Começando com 3, existem 4! = 24 algarismos.
Começando com 5, existem 4! = 24 algarismos.
Começando com 71, existem 3! = 6 algarismos.
Começando com 73, existem 3! = 6 algarismos.
Começando com 751, existem 2! = 2 algarismos.
Começando com 753, existem 2! = 2 algarismos.
Em seguida, o próximo algarismo será 75913.

Logo, o candidato será o 89º a ser chamado, número que representa a soma da quantidade de algarismos.

02 B

5! = 120 sequências possíveis para se visitar as 5 cidades. Desconsiderando as simétricas, têm-se 60 sequências para verificar, logo o tempo necessário será de $1{,}5 \cdot 60 = 90$ minutos.

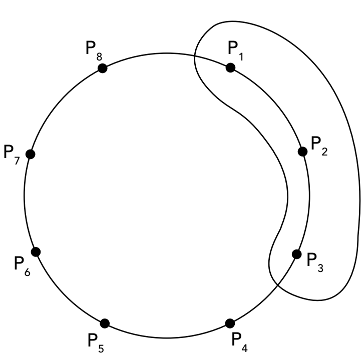
03 C

O menor caminho será formado por dois lados inclinados (descidas) e quatro lados horizontais.

$$P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

04 B

Considere o desenho a seguir.



Sabendo que $P'(n) = (n - 1)!$

$P_3 \cdot P'(n) =$

$3! \cdot (6 - 1)! =$

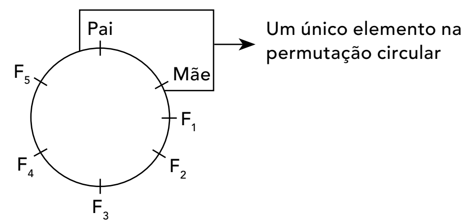
$3! \cdot 5! =$

$6 \cdot 120 = 720$

05 D

Há $PC_{(3)} = 2! = 2$ modos de organizar as meninas em círculo. Definidas as posições das meninas, há três espaços para colocar os meninos. Portanto, como os meninos podem ser dispostos de $P_3 = 3! = 6$ maneiras, pelo Princípio Multiplicativo, o resultado é $2 \cdot 6 = 12$.

06 C



$P_n = (n - 1)! \Rightarrow P_6 = (6 - 1)! \Rightarrow P_6 = 5! = 120$

Permutando a posição do pai e da mãe, tem-se $P_2 = 2! = 2$.

Logo, o total de maneiras de dispor a família ao redor da mesa é dado por:

$P = 2 \cdot 120 = 240$.

Atividades propostas

01 B

É possível organizar as sandálias de 2! formas diferentes, e os sapatos podem ser dispostos de 6! modos. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, os calçados podem ser organizados de $2! \cdot 6! = 2 \cdot 6!$ formas distintas.

02 B

As 10 pessoas podem se sentar de $P_{10} = 10!$ maneiras. Por outro lado, o casal que está brigado pode se sentar lado a lado de $P_9 \cdot P_2 = 2 \cdot 9!$ modos. Em consequência, o resultado pedido é $10! - 2 \cdot 9! = 10 \cdot 9! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9!$.

03 C

Existem 2 maneiras de escolher um dos lados da mesa. Escolhido o lado, os três lugares que o casal e um dos membros da família irão ocupar podem ser definidos de $P_2 = 2! = 2$ maneiras. O casal ainda pode trocar de lugar de $P_2 = 2! = 2$ modos, e a família pode ocupar os 4 lugares de $P_4 = 4! = 24$ maneiras.

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o resultado pedido é dado por $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 = 192$.

04 **D**

Supondo que todos aparecerão na foto lado a lado, haverá 2 possibilidades para os avós e $P_8 = 8! = 40\,320$ possibilidades para os netos. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $2 \cdot 40\,320 = 80\,640$ maneiras distintas de fazer a foto.

05 **A**

A sequência 2, 4, 1, 3 não pode ocorrer, pois, após o pedido 4 ser retirado, o próximo pedido seria o 3.

A sequência 4, 2, 1, 3 não pode ocorrer pelo mesmo motivo da sequência 2, 4, 1, 3.

A sequência 3, 4, 1, 2 não pode ocorrer, já que o próximo pedido a ser retirado após o 4 seria o 2.

A sequência 4, 1, 2, 3 não pode ocorrer pelo mesmo motivo das sequências 2, 4, 1, 3 e 4, 2, 1, 3.

Portanto, a única sequência correta é 1, 3, 2, 4.

06 **B**

Sabendo que a criança ganhou dois picolés de cada sabor, o resultado pedido é dado por:

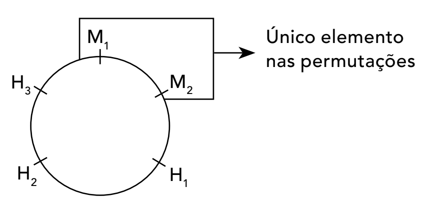
$$P_6^{(2,2,2)} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90.$$

07 **C**

Inicialmente, calcula-se o total de disposições (sem restrição) e diminui-se desse resultado o número de disposições em que as meninas estão juntas.

I. Total de disposições: $P_{Cn} = (n-1)! \Rightarrow P_{C5} = (5-1)! = 4! = 24$

II. Número de disposições com as meninas juntas:



Logo, $P_{C4} = (4-1)! = 3! = 6$.

Permutação das meninas: $P_2 = 2! = 2$.

Total: $6 \cdot 2 = 12$.

Portanto, a resposta será dada pela diferença entre I e II:

$T = 24 - 12 = 12$.

08 **B**

Como eles formam uma roda, trata-se de permutação circular, logo:

$P_{Cn} = (n-1)!$

$P_{C7} = (7-1)! = 6! = 720$

09 **B**

O resultado pedido é igual ao número de soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z + \alpha + \beta = 9$, em que **x**, **y**, **z**, **α** e **β** representam o número de cotas de cada acionista.

Como **x**, **y**, **z**, **α** e **β** ≥ 1, $x = a + 1$; $y = b + 1$; $z = c + 1$; $\alpha = d + 1$ e $\beta = e + 1$.

Desse modo:

$x + y + z + \alpha + \beta = 9$

$a + b + c + d + e = 4$

| • | • | • | •

$$P_8^{(4,4)} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = \frac{1680}{24} = 70$$

10 **A**

Supondo que, ao modificar a ordem das fotos, obtêm-se composições distintas, o número de maneiras possíveis de fazer uma composição é dado por

$P_4 \cdot (5 \cdot 6 \cdot 4)^4 = 24 \cdot 120^4$.

11 **D**

Nove pessoas são distribuídas para nove lugares distintos, tem-se então uma permutação de nove elementos:

$P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$.

12 **C**

Supondo que as pessoas A e B seguem sentadas juntas, pode-se considerar que os agrupamentos possíveis serão das seguintes formas:

I. (AB) XYZWK $\cdot P_{Cn} = (6-1)! = 5! = 120$

II. (BA) XYZWK $\cdot P_{Cn} = (6-1)! = 5! = 120$

Logo, o número total será 240.