Módulo 9 Números binomiais; Triângulo de Pascal e suas propriedades

Atividades para sala

01 B

Dados: $\binom{m-1}{p-1} = 10;\ \binom{m}{m-p} = 55.$

$\binom{m}{m-p} = \binom{m}{p}$, pois são binomiais complementares.

Pela Relação de Stifel:

$$\binom{m-1}{p-1} + \binom{m-1}{p} = \binom{m}{p}$$

$$10 + \binom{m-1}{p} = \binom{m}{m-p}$$

$$10 + \binom{m-1}{p} = 55$$

$$\binom{m-1}{p} = 45$$

02 D

Dados: $\binom{x}{y} = 28;\ \binom{x}{y+1} = 56.$

Pela Relação de Stifel:

$$\binom{x}{y} + \binom{x}{y+1} = \binom{x+1}{y+1}$$

$$28 + 56 = \binom{x+1}{y+1}$$

$$\binom{x+1}{y+1} = 84$$

03 D

$$\underbrace{\binom{10}{5} + \binom{10}{6}}_{\downarrow} + \binom{11}{7} = \binom{12}{n^2-2}$$

$$\underbrace{\binom{11}{6} + \binom{11}{7}}_{\downarrow} = \binom{12}{n^2-2}$$

$$\binom{12}{7} = \binom{12}{n^2-2} \Rightarrow \begin{cases} 7 = n^2 - 2 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = 3 \text{ ou } \underbrace{n = -3}_{\text{Falsa}} \\ \text{ou} \\ 7 + n^2 - 2 = 12 \Rightarrow n^2 = 7 \Rightarrow \underbrace{n = \pm\sqrt{7}}_{\text{Falsa}} \end{cases}$$

Logo, n = 3 (divisor de 15).

04 C

A tabela da questão contém o Triângulo de Pascal.

$$\binom{15}{13} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

05 C

Linha "n" qualquer: $a + b$

Linha "n + 1" qualquer: c

$a + b = c$ → **Relação de Stifel**

O primeiro elemento de qualquer linha é sempre igual a 1, visto ser dado pelo binomial $\binom{n}{0}$.

Se a soma dos três primeiros elementos de certa linha é 121:

1 + a + b = 121 ⇒ a + b = 120

Pela Relação de Stifel:

a + b = c ⇒ 120 = c; logo, o terceiro elemento da linha seguinte a **n** é igual a 120.

06 A

1ª linha:	1
2ª linha:	1 1
3ª linha:	1 2 1
4ª linha:	1 3 3 1
5ª linha:	1 4 6 4 1
6ª linha:	1 5 10 10 5 1

Observando o Triângulo de Pascal-Tartaglia, verifica-se que:

I. O valor do segundo elemento de cada linha é uma unidade a menos que a linha.
(Exemplo: segundo elemento da linha 4 é igual a 4 – 1 = 3)
Logo, o segundo elemento da linha 2009 será 2009 – 1 = 2008.

II. O valor do penúltimo elemento de cada linha é igual a uma unidade a menos que a linha.
(Exemplo: Penúltimo elemento da linha 5 é igual a 5 – 1 = 4)
Logo, o penúltimo elemento da linha anterior a 2009, ou seja, a linha 2008, será 2008 – 1 = 2007.

Portanto, a soma do segundo elemento da linha 2009 com o penúltimo da linha 2008 vale 2008 + 2007 = 4015.

Atividades propostas

01 **D**

$$\binom{100}{97}+2\binom{100}{98}+\binom{100}{99}+\binom{102}{98}$$

$$\underbrace{\binom{100}{97}+\binom{100}{98}}+\underbrace{\binom{100}{98}+\binom{100}{99}}+\binom{102}{98}$$

$$\underbrace{\binom{101}{98}+\binom{101}{99}}+\binom{102}{98}$$

$$\binom{102}{99}+\binom{102}{98}=\binom{103}{99}$$

02 **C**

$$\underbrace{\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{3}}_{\text{Relação de Stifel}}=\binom{k+2}{5}$$

$$\binom{k+2}{3}=\binom{k+2}{5}\Rightarrow\begin{cases}3=5\ (F)\\ \text{ou}\\ 3+5=k+2\Rightarrow 8=k+2\Rightarrow k=6\end{cases}$$

03 **B**

Aplicando a Relação de Stifel:

$$\underbrace{\binom{7}{2}+\binom{7}{3}}_{\binom{8}{3}}+\binom{8}{4}+\binom{9}{5}\Rightarrow\underbrace{\binom{8}{3}+\binom{8}{4}}_{\binom{9}{4}}+\binom{9}{5}\Rightarrow\underbrace{\binom{9}{4}+\binom{9}{5}}_{\binom{10}{5}}=\binom{10}{5}\Rightarrow$$

$$\frac{10!}{5!\cdot 5!}=252$$

04 **A**

$$D=\begin{vmatrix}\binom{12}{3} & \binom{12}{9} & 6!\\ \binom{13}{6} & \binom{13}{7} & 1!\\ \binom{14}{9} & \binom{14}{5} & 4!\end{vmatrix}\quad \text{Note que: } \binom{12}{3}=\binom{12}{9};\ \binom{13}{6}=\binom{13}{7};\ \binom{14}{9}=\binom{14}{5}$$

Com isso, têm-se duas colunas iguais cujo determinante é zero.

Portanto, D = 0.

Substituindo:
$(D + 2)! + 3^D \Rightarrow (0 + 2)! + 3^0 \Rightarrow 2! + 1 \Rightarrow 2 + 1 = 3.$

05 **D**

$$\begin{cases}\binom{10}{p}=\binom{10}{q}\Rightarrow p+q=10 \quad ①\\ p-3q=2 \quad ②\end{cases}$$

$$\begin{cases}p+q=10 & \cdot(3)\\ p-3q=2 & +\end{cases}$$

$4p=32 \therefore p=8$

$p+q=10$

$8+q=10\Rightarrow q=2$

$p+2q=8+2\cdot(2)=12$

06 **E**

$$\binom{n+3}{n+2}+\binom{n+5}{n+2}+\binom{n+4}{n+3}+\binom{n+3}{n+1}$$

Colocando na ordem:

$$\underbrace{\binom{n+3}{n+1}+\binom{n+3}{n+2}}_{\text{Binomiais consecutivos}}+\binom{n+4}{n+3}+\binom{n+5}{n+2}$$

$$\underbrace{\binom{n+4}{n+2}+\binom{n+4}{n+3}}_{\text{Binomiais consecutivos}}+\binom{n+5}{n+2}$$

$$\underbrace{\binom{n+5}{n+3}+\binom{n+5}{n+2}}_{\text{Binomiais consecutivos}}=\binom{n+6}{n+3}$$

07 **C**

Há $C_{6,1}$ modos de abrir o palácio abrindo uma só porta, $C_{6,2}$ modos de abrir o palácio abrindo duas portas etc.
Logo:

$C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + ... + C_{6,6} = x$

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\ldots+\binom{6}{6}=x+\binom{6}{0}$$

$2^6 = x + 1$
$64 = x + 1$
$x = 63$

08 **E**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n-1}$$

Então:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}=2^{n-1}$$

09 **B**

$$N=\sum_{i=0}^{20}\binom{40}{2i}=\binom{40}{0}+\binom{40}{2}+\binom{40}{4}+\ldots+\binom{40}{40}=2^{40-1}=2^{39}$$

Portanto, $\log_2 N=\log_2 2^{39}=39\log_2 2=39.$

10 **A**

$$S=\{(a,b)\in\frac{N\cdot N}{a+b}=18\}$$

$$a=0\Rightarrow b=18\Rightarrow\frac{18!}{0!\,18!}=\binom{18}{0}$$

$$a=1\Rightarrow b=17\Rightarrow\frac{18!}{1!\,17!}=\binom{18}{1}$$

$$a=2\Rightarrow b=16\Rightarrow\frac{18!}{2!\,16!}=\binom{18}{2}$$

$\vdots$

$$a=18\Rightarrow b=0\Rightarrow\frac{18!}{18!\,0!}=\binom{18}{18}$$

$$S=\binom{18}{0}+\binom{18}{1}+\binom{18}{2}+\ldots+\binom{18}{18}=2^{18}=(2^3)^6=8^6$$

11 **B**

Nota-se na tabela que a soma dos elementos de uma linha **i** qualquer é dada por $S_i = 2^{i-1}$.

Sendo $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, tem-se $S = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}$; isto é, S é a soma dos **n** primeiros termos de uma P.G. cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2.

Logo, $S=\dfrac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1.$

12 **C**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=256$$

$2^n=256$

$2^n=2^8$

$n=8$