Módulo 11 Logaritmos – Definição, condição de existência e propriedades operatórias; Equações logarítmicas

Atividades para sala

01 A

Verificando as alternativas:

a) (V) Para $a > 0$ e $1 \neq b > 0$, tem-se:
$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \Leftrightarrow b^{\log_b a} = a$
Assim, $2^{\log_2 3} = 3$.

b) (F) $\log\left(\frac{125}{3}\right) = \log 125 - \log 3 \neq \frac{\log 125}{\log 3}$

c) (F) 1 trilhão $= 10^{12} \Rightarrow \log 10^{12} = 12$

d) (F) $\log 200 = \log(2 \cdot 10^2) = \log 2 + 2$

e) (F) $\log \frac{1}{\sqrt{100\,000}} = \log \frac{1}{10^{2,5}} = \log 10^{-2,5} = -2,5$

02 D

Substituindo-se x = 12,5 cm na equação da Lei de Beer-Lambert, tem-se:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08x$$

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08 \cdot 12,5$$

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -1$$

$$\frac{L}{15} = 10^{-1}$$

$$L = 15 \cdot 10^{-1}$$

L = 1,5 lúmen

03 B

$100^{0,3} = 100^{\log 2} = (10^2)^{\log 2} = 10^{\log 2^2} = 10^{\log 4} = 4$

04 D

Se **x** é a altura que a escada alcança na parede, então, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$x^2 + (x-5)^2 = 15^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 100 \Rightarrow x = \frac{5}{2}\left(1 + \sqrt{17}\right)$

Sendo $\alpha = \sqrt{17}$ e tomando $\log_{4,12} 17 \cong 2$, tem-se:

$\log_{4,12} \alpha = \log_{4,12} 17^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \log_{4,12} \alpha = \frac{1}{2} \log_{4,12} 17 \Rightarrow \log_{4,12} \alpha \cong 1 \Leftrightarrow \alpha \cong 4,12$

Portanto, $x \cong \frac{5}{2}(1 + 4,12) = 12,80$ m.

05 D

$\frac{2^\alpha}{2^0} = 1,6 \Rightarrow 2^\alpha = 1,6 \Rightarrow \log 2^\alpha = \log 1,6 \Rightarrow$

$\alpha \cdot \log 2 = \log \frac{16}{10} \Rightarrow \alpha \cdot \log 2 = \log 16 - \log 10 \Rightarrow$

$\alpha \cdot \log 2 = \log 2^4 - \log 10 \Rightarrow \alpha \cdot \log 2 = 4 \cdot \log 2 - \log 10 \Rightarrow$

$0,3\alpha = 4 \cdot 0,3 - 1 \Rightarrow 0,3\alpha = 0,2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Logo, a nota é Sol#.

06 B

$$r_1 - r_2 = \log_{10}\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow$$

$$5,9 - 5,8 = \log_{10}\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow$$

$$0,1 = \log_{10}\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 10^{0,1}$$

07 D

$N = 1 \Rightarrow R = 95$.

Logo, $95 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_s \Rightarrow I_s = 10^{-2,5}$.

Sabe-se que I_s é proporcional ao número de caixas ligadas, então, $I_s = k \cdot N$.

Para $N = 1$, $I_s = 10^{-2,5}$. Logo, $k = 10^{-2,5}$.

Para determinar N de modo que R = 115,

$120 + 10 \cdot \log_{10} I_s = 115 \Rightarrow \log I_s = -0,5 \Rightarrow I_s = 10^{-0,5}$.

Como $I_s = k \cdot N$, tem-se: $10^{-2,5} \cdot N = 10^{-0,5} \Rightarrow N = 10^2 = 100$

08 B

Calcula-se o valor de **t** para o qual se tem $D(t) = 2 \cdot D(0)$. Portanto, tem-se:

$2 \cdot D(0) = D(0) \cdot e^{0,006 \cdot t} \Leftrightarrow \ell n\, 2 = \ell n\, e^{0,006 \cdot t} \Rightarrow 0,006t \cong 0,69$
$\Rightarrow t \cong 115$

09 C

$N = N_0 \cdot e^{kt}$

Para t = 10, tem-se:

$$8000 = 5000 \cdot e^{10k} \Rightarrow e^{10k} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore\ \ell n\, \frac{8}{5} = \ell n\, e^{10k}$$

$\ell n\, 8 - \ell n\, 5 = 10k \cdot \ell n\, e$

$\ell n\, 2^3 - \ell n\, 5 = 10k \Rightarrow 3 \cdot \ell n\, 2 - \ell n\, 5 = 10k$

$3 \cdot 0,69 - 1,61 = 10k \Rightarrow k = 0,046$

Assim:

$2\,N_0 = N_0 \cdot e^{0,046t} \Rightarrow \ell n\, 2 = \ell n\, e^{0,046t}$

$\therefore 0,69 = 0,046 \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{0,69}{0,046}$

$t = 15$ minutos

Atividades propostas

01 E

Montante A: $10000 \cdot (1,2)^t$
Montante B: $5000 \cdot (1,68)^t$
Para os montantes serem iguais, tem-se:
$10000 \cdot (1,2)^t = 5000 \cdot (1,68)^t$

$\left(\dfrac{1,68}{1,2}\right)^t = 2 \Rightarrow 1,4^t = 2$

Aplicando o logaritmo a ambos os lados, tem-se:
$\log 2 = \log 1,4^t$

$\log 2 = t\left(\log\dfrac{2 \cdot 7}{10}\right)$

$\log 2 = t\,(\log 2 + \log 7 - \log 10)$
$0,30 = t\,(0,30 + 0,85 - 1)$
$0,15t = 0,30$
$t = 2$ anos, portanto, 24 meses.

02 A

O valor de cada expressão é:

$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$

$\log_{\frac{1}{25}} 125 = \log_{5^{-2}} 5^3 = -\dfrac{3}{2}$

$\log_{16} 1024 = \log_{2^4} 2^{10} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

$\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$

$\log_{27} 243 = \log_{3^3} 3^5 = \dfrac{5}{3}$

Sorteando duas fichas ao acaso, a probabilidade de obter soma inteira é igual à probabilidade de retirar duas fichas com dois números inteiros, ou seja,

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

03 C

Para uma intensidade de 10^{-3} W/m², tem-se:

$NS = 10\log\left(\dfrac{10^{-3}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log 10^9 = 90$ dB

04 E

$I_{dB} = 10 \cdot \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$

$I_{dB} = 10 \cdot \log\left(\dfrac{10}{10^{-12}}\right)$

$I_{dB} = 10 \cdot \log 10^{13}$

$I_{dB} = 10 \cdot 13 \cdot \log 10 = 130 \log 10$

$I_{dB} = 130 \cdot 1 = 130$

05 B

$C_F = C_0\,(1 + i)^T$

$43200 = 20000\,(1 + 0,08)^T$

$(1,08)^T = 2,16$

Aplicando logaritmos a ambos os lados, tem-se:

$\log (1,08)^T = \log 2,16$

$T \cdot 0,03 = 0,33$

$T = 11$

06 B

$M = \left(4^{\log_5 9}\right)^{\log_4 5} = \left(4^{\log_4 5}\right)^{\log_5 9} = 5^{\log_5 9} = 9$

07 E

$M_W = -10,7 + \dfrac{2}{3}\log_{10} M_0$

Para $M_W = 7,3$, tem-se que:

$7,3 = -10,7 + \dfrac{2}{3}\log_{10} M_0$

$\dfrac{2}{3}\log M_0 = 7,3 + 10,7 = 18$

$\log M_0 = \dfrac{18 \cdot 3}{2} = 27$

Aplicando a definição de logaritmos, tem-se que:

$\log M_0 = 27$

$M_0 = 10^{27}$

08 C

De acordo com os dados do problema, tem-se:

$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR} \Rightarrow$

$140 = (740 - 40) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + 40 \Rightarrow$

$100 = 700 \cdot 10^{-\frac{t}{12}} \Rightarrow$

$10^{-\frac{t}{12}} = \dfrac{1}{7}$

$\log 10^{-\frac{t}{12}} = \log 7^{-1}$

$-\dfrac{t}{12} = -\log 7$

$t = 12 \log (7)$ minutos

09 **C**

$\beta(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, tem-se:

$$\beta(0{,}0018) = 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{18}{10\,000}}{10^{-12}}\right) = 10 \log\left(\frac{18}{10^{-8}}\right) =$$

$$10 \cdot (\log 18 - \log 10^{-8}) = 10 \cdot [\log 2 + 2\log 3 + 8] =$$

$$10 \cdot (0{,}301 + 0{,}954 + 8) = 10 \cdot (9{,}255) = 92{,}55$$

10 **D**

1º passo: Cálculo de **α**.

$D(t) = D_0 \cdot 2^{(-2\alpha \cdot t)}$; para t = 1, tem-se:

$D(1) = D_0 \cdot 2^{(-2\alpha \cdot 1)} \Rightarrow 15 = 16 \cdot 2^{-2\alpha}$

Aplicando $\log_2$, tem-se:

$\log_2 15 = \log_2 (16 \cdot 2^{-2\alpha}) \Rightarrow -2\alpha = \log_2 15 - \log_2 16 \Rightarrow$

$-2\alpha = \log_2 3 + \log_2 5 - 4$

Assim, $\alpha = 0{,}05$.

2º passo: Cálculo de **t**.

Deve-se determinar **t**, para D(t) = 20.

$$D(t) = D_0 \cdot 2^{-2\alpha t} \Rightarrow 20 = 16 \cdot 2^{(-2\alpha t)} \Rightarrow -2\alpha t = \log_2 \frac{5}{4} \Rightarrow t = \frac{2 - \log_2^5}{2\alpha}$$

$$t = \frac{2 - 2{,}3}{2 \cdot 0{,}05} = -3$$

Logo, a pessoa morreu aproximadamente 3 horas antes de t = 0, às 19h30min.

11 **E**

Sendo m = 0,2 (magnitude aparente) e M = –6,8 (magnitude absoluta), tem-se: $-6{,}8 = 0{,}2 + 5 \cdot \log_3(3 \cdot d^{-0{,}48})$

$$5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48}) = -7 \Rightarrow$$

$$\log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48}) = -\frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\log_3 3 + \log_3 d^{-0{,}48} = -\frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$1 + \log_3 d^{-0{,}48} = -\frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\log_3 d^{-0{,}48} = -\frac{12}{5} \Rightarrow$$

$$-0{,}48 \cdot \log_3 d = -\frac{12}{5} \Rightarrow$$

$$\log_3 d = \frac{2{,}4}{0{,}48} = 5 \Rightarrow d = 3^5 \text{ parsecs}$$

Em km, tem-se: $3^5 \cdot 3 \cdot 10^{13} = 729 \cdot 10^{13} = 7{,}29 \cdot 10^{15}$ km

12 **A**

Indicando por C, M, **i** e **t** o valor nominal da multa, o valor pago pela multa, a taxa ao dia e o tempo, em dias, respectivamente,

C = 3000	i = 0,05% = 0,0005
M = 3019,50	t = ?

Aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$, obtém-se:

$3019{,}50 = 3000(1 + 0{,}0005)^t \Rightarrow (1{,}0005)^t = 1{,}0065$

$\therefore t = \log_{1{,}0005} 1{,}0065$

Pela propriedade da mudança de base, transforma-se o logaritmo para a base 10:

$$t = \log_{1{,}0005} 1{,}0065 = \frac{\log 1{,}0065}{\log 1{,}0005} = \frac{\log \frac{10\,065}{10\,000}}{\log \frac{10\,005}{10\,000}} \Rightarrow$$

$$\frac{\log 10\,065 - \log 10^4}{\log 10\,005 - \log 10^4} \Rightarrow t = \frac{4{,}0028 - 4}{4{,}0002 - 4} = \frac{0{,}0028}{0{,}0002} = 14$$

Portanto, a multa foi paga com 14 dias de atraso, no dia 14 de janeiro.

13 **B**

$\log 6 + x = \log 28$

$\log 2 + \log 3 + x = \log (4 \cdot 7)$

$\log 2 + \log 3 + x = \log 2^2 + \log 7$

$\log 2 + \log 3 + x = 2 \log 2 + \log 7$

$\log 2 + \log 7 - \log 3 = x$

$x = 0{,}301 + 0{,}845 - 0{,}477$

$x = 0{,}669$

14 **D**

De acordo com o problema,

$x + 1 > 0$ e $x^2 + 35 > 0$.

Assim,

$\log_{10} (x + 1) + 1 = \log_{10} (x^2 + 35)$

$\log_{10} (x + 1) + \log_{10} 10 = \log_{10} (x^2 + 35)$

$\log_{10} (10x + 10) = \log_{10} (x^2 + 35)$

$10x + 10 = x^2 + 35$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

x = 5 (verificar as condições de existência).

15 **B**

Na tabela, o bacilo que causa diarreia é o *Escherichia coli*.

$50 = 10 \cdot 2^n$

$2^n = 5$

Aplicando logaritmos, tem-se:

$\log 2^n = \log 5$

$n \cdot \log 2 = \log 10 - \log 2$

$n \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}3$

$n = \frac{7}{3}$

Logo, $t = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)} = \frac{3}{7}$ hora, aproximadamente 26 minutos.

16 **D**

I. $\log E = 1{,}44 + 1{,}5 \cdot 9{,}5 = 1{,}44 + 14{,}25 = 15{,}69 \Rightarrow$
$E_{Chile} = 10^{15{,}69}$

II. $\log E = 1{,}44 + 1{,}5 \cdot 7{,}8 = 1{,}44 + 11{,}7 = 13{,}14 \Rightarrow$

$E_{SF} = 10^{13,14}$

$E_{Chile} = 10^{15,69} \cong 10^{13,14 + 1 + 0,5} = 10^{13,14} \cdot 10\sqrt{10}$

$E_{Chile} \cong 31 \cdot E_{SF}$

17 **A**

$pH = -\log(0{,}005) = -\log\left(\frac{1}{200}\right) = -(\log 1 - \log 200) =$

$-\log 1 + \log 200 = \log 2 + \log 100 = 0{,}3 + 2 = 2{,}3$

O pH encontrado é correspondente ao do suco de limão/lima.

18 **A**

$$A = 1{,}6\text{ m} = 160\text{ cm} \Rightarrow$$
$$160 = 40 \cdot 1{,}1^t \Rightarrow$$
$$1{,}1^t = 4 \Rightarrow$$
$$\log 1{,}1^t = \log 4 \Rightarrow$$
$$t \cdot \log 1{,}1 = \log 2^2 \Rightarrow$$
$$t \cdot \log 1{,}1 = 2 \cdot \log 2 \Rightarrow$$
$$t \cdot \log\left(\frac{11}{10}\right) = 2 \cdot 0{,}3 \Rightarrow$$
$$t \cdot (\log 11 - \log 10) = 0{,}6 \Rightarrow$$
$$t \cdot (1{,}04 - 1) = 0{,}6 \Rightarrow$$
$$t = \frac{0{,}6}{0{,}04} = 15$$

Logo, a planta terá altura de 1,6 m, aproximadamente, aos 15 anos.