Resoluções

Capítulo 10

Determinantes II – Teoremas e propriedades

ATIVIDADES PARA SALA

01 det (A · B) = det A · det B
60 = 5 · det B
det B = 12

02 a) $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2$

b) $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{matrix} \Rightarrow \det M = -16$

$-12 \quad -12 \quad 0 \quad 12 \quad 0 \quad -4$

c) $\det M = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (12 - 12) = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 + 12) = 16$

$\det M = \underbrace{1 \cdot 0}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{12}}_{0} + \underbrace{(-1) \cdot 16}_{-16}$

det M= –16

03 a) $a_{14} \cdot A_{14} + \underbrace{a_{24} \cdot A_{24}}_{0} + \underbrace{a_{34} \cdot A_{34}}_{0} + a_{44} \cdot A_{44} =$

$= 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 25 = 50 - 6 = 44$

$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{matrix} = (-1) \cdot 6 = -6$

$3 \quad 2 \quad -20 \quad 15 \quad 2 \quad 4$

$A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{matrix} = 1 \cdot 25 = 25$

$-8 \quad 9 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 6$

b) Pelo Teorema de Laplace:

$a_{11} \cdot A_{11} + \underbrace{a_{21} \cdot A_{21}}_{0} + \underbrace{a_{31} \cdot A_{31}}_{0} + \underbrace{a_{41} \cdot A_{41}}_{0} + \underbrace{a_{51} \cdot A_{51}}_{0} = a_{11} \cdot A_{11}$

Para o cálculo de A_{11}, tem-se:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Multiplicando-se os elementos da 1ª linha por –1 e somando-se com os elementos das 2ª, 3ª e 4ª linhas, tem-se:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = a_{24} \cdot A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1 - 4 + 2 - 4 = 3 - 8 = -5$

Logo, $a_{11} \cdot A_{11} = 3 \cdot (-5) = -15$.

04 **A**

Cálculo de **x** pelo Teorema de Laplace:

$a_{13} \cdot A_{13} + \underbrace{a_{23} \cdot A_{23}}_{0} + \underbrace{a_{33} \cdot A_{33}}_{0} + \underbrace{a_{43} \cdot A_{43}}_{0} = 0$

$a_{13} \cdot A_{13} = 0$

$5 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$5(2x + \cancel{x^2} + 1 - 2 - \cancel{x^2} - x) = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

05 Por se tratar de um determinante de Vandermonde, tem-se:

$(x - 7 - 2)\,(-5 - 2)\,(-4 - 2)\,(-5 - x + 7)\,(-4 - x + 7)\,(-4 + 5) = 0$

$x - 9 = 0$ ou $2 - x = 0$ ou $3 - x = 0$

$x = 9$ $\quad x = 2$ $\quad x = 3$

Produto = 9 · 2 · 3 = 54

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 **F, V, V, V**

(F) Essa situação só é verdadeira se obedecer às condições da 7ª propriedade.
(V) 10ª propriedade.
(V) 3ª propriedade.
(V) 10ª propriedade.

02 **E**

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 3 = -6$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 3 = -6$$

Então:
$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = (-6) \cdot (-6)$
Portanto:
$\det(A \cdot B) = 36$

03 **A**

Pela propriedade da combinação linear, o determinante é igual a zero.

04 **B**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

Multiplicando-se os elementos da 1ª linha por –1 e somando-se com os elementos das 2ª, 3ª e 4ª linhas, tem-se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

Logo, por Laplace, conclui-se:

$$1\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

05 **B**

O determinante é de Vandermonde, então:
$(2a - a) \cdot (3a - a) \cdot (3a - 2a) = a \cdot 2a \cdot a = 2a^3$

06 **D**

Resolvendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot (-12) = 4$$

07 **E**

$\det B^{-1} = \det(2A)$

$$\frac{1}{\det B} = 2^2 \cdot \det A \Rightarrow \det B = \frac{1}{4 \cdot \det A}$$

08 **A**

Cálculo das matrizes A e B:

$$A = (a_{ij})_{3\times 3}, \text{ em que } \begin{cases} a_{ij} = 1, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = (b_{ij})_{3\times 3}, \text{ em que } \begin{cases} b_{ij} = 2, \text{ se } i = 4 - j \\ b_{ij} = 0, \text{ se } i \neq 4 - j \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo $\det A = \det I_3 = 1$ e $\det B = -8$, tem-se:
$\det(AB) = \det A \cdot \det B = -8$.

09 **D**

Como A é uma matriz quadrada de ordem 2, tem-se:
$\det(2A) = \det(A^2) \Rightarrow$
$2^2 \det(A) = (\det A)^2 \Rightarrow$
$(\det A)^2 - 4(\det A) = 0 \Rightarrow$
$(\det A)(\det A - 4) = 0 \Rightarrow$
$\det A = 0$ ou $\det A = 4$
Como A é inversível, tem-se $\det A \neq 0$.
Logo, $\det A = 4$.

10 **D**

Cálculo de P(x):
$P(x) = \det(A - xI)$

$$P(x) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$P(x) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right]$$

$$P(x) = \det\begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{bmatrix}$$

$P(x) = (1 - x)(4 - x) - 3 \cdot 2$
$P(x) = x^2 - 5x - 2$
Cálculo da soma dos quadrados das raízes:
$(x')^2 + (x'')^2 = (x' + x'')^2 - 2x' \cdot x''$
$(x')^2 + (x'')^2 = 5^2 - 2 \cdot (-2)$
Portanto:
$(x')^2 + (x'')^2 = 29$