Resoluções

Capítulo 3

Teorema da Bissetriz Interna

TESTANDO SEUS CONHECIMENTOS

01 Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow {}^{\times 3}\frac{6}{2} = \frac{2x+5}{x}{}^{\times 3} \Rightarrow 3x = 2x + 5 \Rightarrow x = 5$
(por razões equivalentes)

$\overline{AB} = 2x + 5 \Rightarrow 2 \cdot 5 + 5 = 15$

02 Aplicando o Teorema da Bissetriz, tem-se:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CS}} \Rightarrow {}^{\times 5}\frac{x}{6} = \frac{40}{8}{}^{\times 5} \Rightarrow x = 30$
(por razões equivalentes)

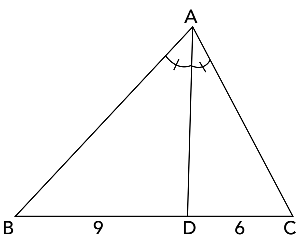
03 Observe que x + y = 9 e x = 9 – y.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CS}} \Rightarrow \frac{\cancel{12}}{y} = \frac{\cancel{15}}{9-y} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{5}{9-y}$

$5y = 4(9-y) \Rightarrow 5y = 36 - 4y \Rightarrow 9y = 36$

$y = 4$ e $x = 9 - 4 = 5$

04 Observe o desenho.



Se o perímetro é 45 cm, então $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 45$.

Logo, $\overline{AB} + \overline{AC} + 15 = 45$ e $\overline{AB} + \overline{AC} = 30$.

Observe que $\overline{AB} = 30 - \overline{AC}$.

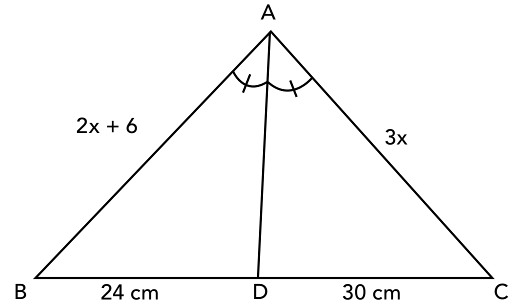
Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{30 - \overline{AC}}{\cancel{9}} = \frac{\overline{AC}}{\cancel{6}} \Rightarrow \frac{30 - \overline{AC}}{3} = \frac{\overline{AC}}{2}$

$3\overline{AC} = 2 \cdot (30 - \overline{AC}) \Rightarrow 3\overline{AC} = 60 - 2\overline{AC} \Rightarrow 5\overline{AC} = 60$

$\overline{AC} = 12$ cm e $\overline{AB} = 30 - 12 = 18$ cm

05 Observe:



Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{2x+6}{24} = \frac{3x}{30} \Rightarrow \frac{2x+6}{4} = \frac{3x}{5}$

$4 \cdot 3x = 5 \cdot (2x + 6)$

$12x = 10x + 30 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$ cm

$\begin{cases} \overline{AB} = 2 \cdot 15 + 6 = 30 + 6 = 36 \text{ cm} \\ \overline{AC} = 3 \cdot 15 = 45 \text{ cm} \end{cases}$

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 **D**

Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow 3\overline{BC} = 8 \Rightarrow \overline{BC} = \frac{8}{3}$cm

02 Note que $m + n = \overline{BC} \Rightarrow m + n = 22 \Rightarrow m = 22 - n$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{\cancel{15}^{5}}{22-n} = \frac{\cancel{18}^{6}}{n} \Rightarrow \frac{5}{22-n} = \frac{6}{n} \Rightarrow$

$5n = 6 \cdot (22 - n) \Rightarrow 5n = 132 - 6n \Rightarrow 11n = 132 \Rightarrow n = 12$ cm e $m = 22 - 12 = 10$ cm

03 Aplicando o Teorema de Tales nos triângulos, tem-se:

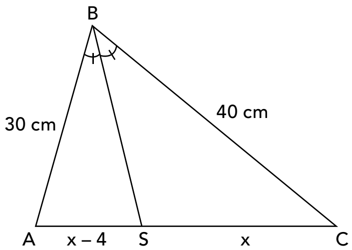
a) ${}^{\times 3}\frac{a}{6} = \frac{12}{4}{}^{\times 3} \Rightarrow a = 18$

$\frac{a+6}{b} = \frac{12+4}{8} \Rightarrow \frac{24}{b} = \frac{16}{8} \Rightarrow b = 12$

b) $\Delta AMN \Rightarrow \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{AN} = 18 + 6 + 4 + 12 = 40$

c) $\Delta ABC \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 18 + 6 + 12 + 8 + 4 + 12 = 60$

04 Observe a figura.



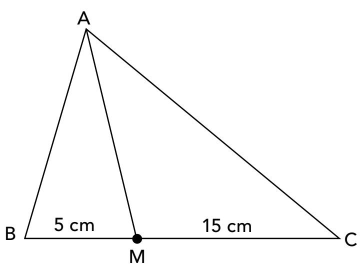
Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, obtém-se:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CS}} \Rightarrow \frac{30}{x-4} = \frac{40}{x} \Rightarrow \frac{3}{x-4} = \frac{4}{x} \Rightarrow 4(x-4) = 3x$

$4x - 16 = 3x \Rightarrow x = 16$, portanto:

$\overline{AC} = 2x - 4 = 2 \cdot 16 - 4 = 32 - 4 = 28$ cm

05 Observe a figura.



Se o perímetro é 48 cm, então $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 48$

$\overline{AB} + \overline{AC} + 20 = 48 \Rightarrow \overline{AB} + \overline{AC} = 28$ cm

$\overline{AB} = 28 - \overline{AC}$

Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

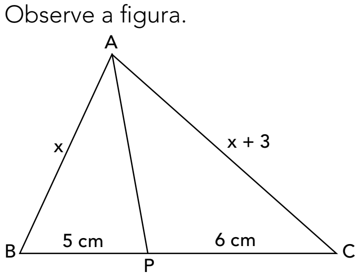
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CM}} \Rightarrow \frac{28 - \overline{AC}}{\cancel{5}^{1}} = \frac{\overline{AC}}{\cancel{15}^{3}} \Rightarrow \frac{28 - \overline{AC}}{1} = \frac{\overline{AC}}{3}$

$\overline{AC} = 3 \cdot (28 - \overline{AC}) \Rightarrow \overline{AC} = 84 - 3\overline{AC}$

$4\overline{AC} = 84 \Rightarrow \overline{AC} = 21$ cm, $\overline{AB} = 28 - 21 = 7$ cm e

$\overline{BC} = 20$ cm

06 Observe a figura.



Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna:

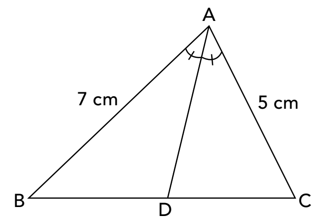
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{x+3}{6} \Rightarrow 6x = 5x + 15 \Rightarrow x = 15$ cm

Assim, as medidas dos lados do triângulo são:

$\overline{AB} = 15$ cm, $\overline{AC} = 18$ cm e $\overline{BC} = 11$ cm.

Logo, seu perímetro é 15 + 18 + 11 = 44 cm.

07 Observe a figura.



Note que $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} = 9$ cm e $\overline{BD} = 9 - \overline{DC}$.

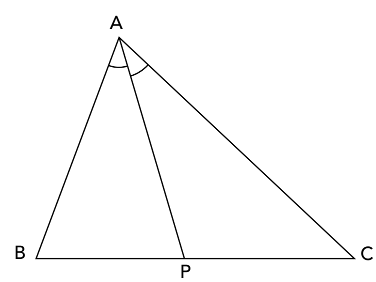
Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{7}{9 - \overline{DC}} = \frac{5}{\overline{DC}} \Rightarrow 7 \cdot \overline{DC} = 5 \cdot (9 - \overline{DC})$

$7\overline{DC} = 45 - 5\overline{DC} \Rightarrow 12\overline{DC} = 45 \Rightarrow \overline{DC} = \frac{45}{12} = 3{,}75$ cm

$\overline{BD} = 9 - 3{,}75 = 5{,}25$ cm

08 Observe o desenho.



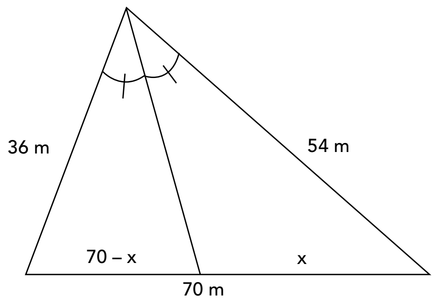
- $\overline{BP}$ e $\overline{PC}$ são chamados segmentos aditivos.
- $\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$ podem assumir o valor 18.
- Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{18}{\overline{AC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overline{AC} = 27 \text{ m} \quad (\times 9) \\ \text{ou} \\ \frac{\overline{AB}}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overline{AB} = 12 \text{ m} \quad (\times 6) \end{cases}$$

(por razões equivalentes)

09 Observe a figura.



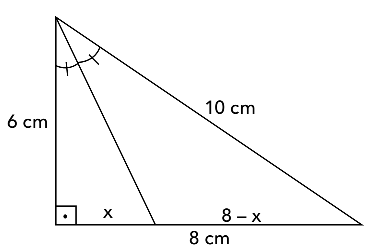
Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$$\frac{\cancel{54}^{6}}{x}=\frac{\cancel{36}^{4}}{70-x}\Rightarrow\frac{\cancel{6}^{3}}{x}=\frac{\cancel{4}^{2}}{70-x}\Rightarrow\frac{3}{x}=\frac{2}{70-x}$$

$2x = 3(70 - x) \Rightarrow 2x = 210 - 3x \Rightarrow 5x = 210$

$x = 42$ m e $70 - x = 70 - 42 = 28$ m

10 Observe a figura.



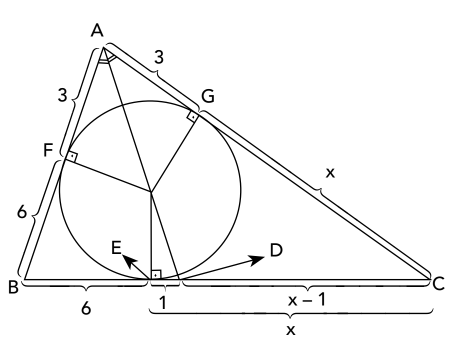
Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$$\frac{{}^{3}\cancel{6}}{x}=\frac{\cancel{10}^{5}}{8-x}\Rightarrow\frac{3}{x}=\frac{5}{8-x}\Rightarrow 5x=3\cdot(8-x)$$

$5x = 24 - 3x \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$ cm e $8 - x = 8 - 3 = 5$ cm

MERGULHANDO FUNDO

01



O centro do círculo é o incentro do ΔABC.
Sejam E, F e G os pontos de tangência da circunferência com os lados $\overline{BC}, \overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Tem-se:

$\overline{AF} = \overline{AG} = 3$; $\overline{CG} = \overline{CE} = x$

$\overline{BE} = \overline{BF} = 6$

$\overline{BD} = 7$

$\overline{DE} = 1$

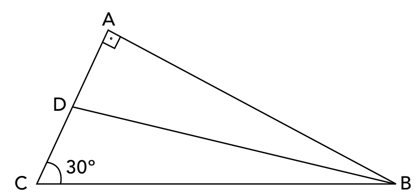
$\overline{CD} = x - 1$

O centro do círculo inscrito é incentro do ΔABC, no qual se tira a bissetriz $\overline{AD}$ de $\hat{A}$.

Então:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\Rightarrow\frac{7}{9}=\frac{x-1}{3+x}\Rightarrow 9x-9=21+7x\Rightarrow 2x=30\Rightarrow x=15$$

02



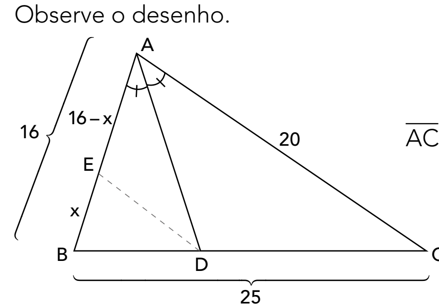
Usando o conceito de que o cateto oposto ao ângulo de 30° mede a metade da hipotenusa, tem-se

$\overline{AB} = x$ e $\overline{BC} = 2x$.

Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}\Rightarrow\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}}\Rightarrow\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{1}{2}$$

03 Observe o desenho.



$\overline{AC} // \overline{DE}$

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \quad \text{(I)}$$

Pelo Teorema de Tales nos triângulos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \quad \text{(II)}$$

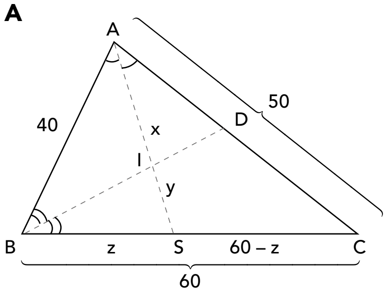
Logo, de (I) e (II), tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{16}{20}=\frac{x}{16-x}\Rightarrow 20x=16(16-x)\Rightarrow 20x=256-16x$$

$$36x=256\Rightarrow x=\frac{256}{36}=\frac{64}{9}\ \text{e}\ 16-x=16-\frac{64}{9}\Rightarrow\frac{80}{9}$$

04 **A**



Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna no triângulo ABC, pode-se observar:

$$\frac{z}{4\cancel{0}} = \frac{60 - z}{5\cancel{0}} \Rightarrow 5z = 240 - 4z \Rightarrow 9z = 240 \Rightarrow z = \frac{240}{9} \Rightarrow z = \frac{80}{3}$$

Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna no triângulo ABS, pode-se observar:

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{40}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{40}{\frac{80}{3}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cancel{40} \cdot \frac{3}{\cancel{80}_{2}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\overline{AI}}{\overline{IS}} = \frac{3}{2}$$