Resoluções

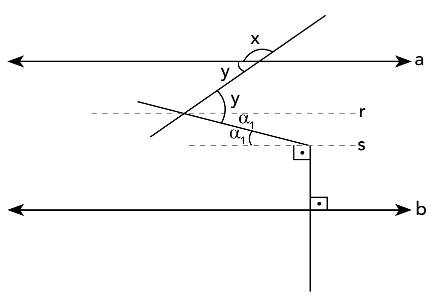
Capítulo 4

Estudo de triângulos e polígonos

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 75

01

Considerando as retas r // s // a // b, tem-se os ângulos alternos internos iguais.



Note que para cada ângulo "dentro" das retas paralelas **a** e **b**, existe outro alterno interno igual, "olhando" para o lado contrário.

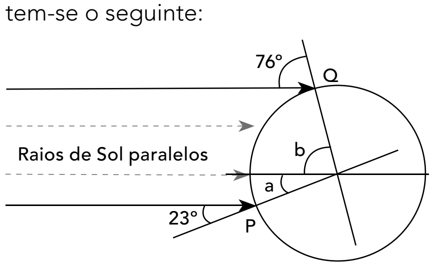
Logo, para os ângulos "dentro" das paralelas **a** e **b**, tem-se:

I. Soma dos ângulos que "olham" para a direita = soma dos ângulos que "olham" para a esquerda.
   $90° + (\alpha_1 + y) = (90° + \alpha_1) + y$
   $90° + 70° = 130° + y$
   $y = 30°$

II. $x + y = 180°$
   $x = 150°$

02 **A**

Prolongando o raio solar que passa no centro da Terra, tem-se o seguinte:



I. a = 23° e b = 76° (correspondentes de retas paralelas)

II. $\overset{\frown}{PQ} = a + b = 99°$

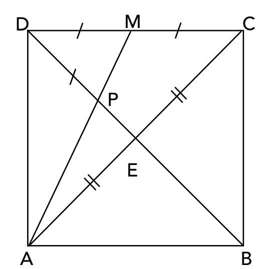
III. Regra de três:

Medida do arco (em graus)	Comprimento do arco (km)
360°	40 000 (Equador)
99°	x

$$\frac{40000}{x} = \frac{360°}{99°} \Rightarrow \frac{40000}{x} = \frac{40}{11} \Rightarrow x = \frac{40000 \cdot 11}{40} = 11000$$

03 **B**

As diagonais de um retângulo são iguais e cortam-se ao meio. Traçando a diagonal $\overline{AC}$, tem-se o seguinte.



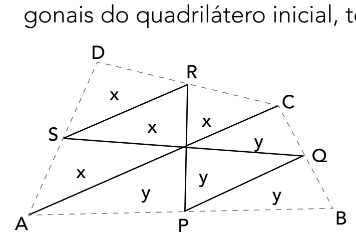
I. AM = AB = 15 (△ABM é equilátero).

II. DE e AM são medianas do △ADC; assim, P é baricentro. Logo, PM = x e AP = 2x.

III. AP + PM = AM
   $2x + x = 15$
   $x = 5$
   Portanto, AP = 2x = 10

04 **D**

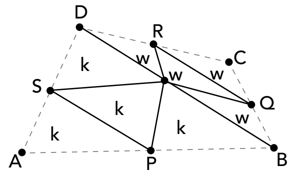
I. As bases médias de um triângulo o dividem em quatro triângulos congruentes. Logo, esses triângulos têm a mesma área. Considerando os pontos médios das diagonais do quadrilátero inicial, tem-se o seguinte:



$4x + 4y = 150000$

$x + y = 37500$

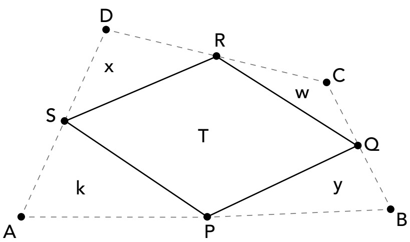
II.



$4k + 4w = 150\,000$

$k + w = 37\,500$

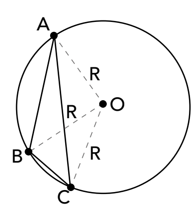
III. Sendo T a área procurada:



$T + (x + y) + (k + w) = 150\,000$
$T + 37\,500 + 37\,500 = 150\,000$
$T = 75\,000$

05 **C**

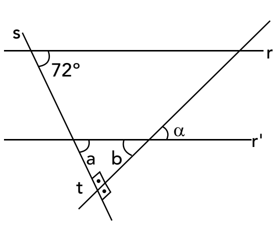
O ponto do plano do triângulo que fica a igual distância dos vértices (casas) é o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) e a distância igual é o raio.



ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 75

01 **E**

Considerando a figura seguinte, tem-se o seguinte:



I. $a = 72°$ (correspondentes)

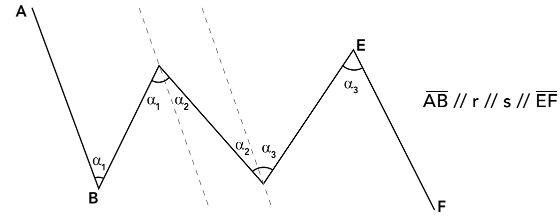
II. $b = \alpha$ (opostos pelo vértice)

III. $a + b + 90° = 180°$

$72° + \alpha + 90° = 180°$

$\alpha = 18°$

02 Considerando os ângulo "dentro" das paralelas $\overline{BA}$ e $\overline{EF}$, tem-se o seguinte:



Soma dos ângulos que "olham" para cima = soma dos ângulos que "olham" para baixo.

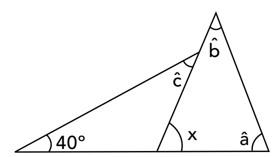
$\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3$

$40° + x = 96° + 52°$

$x = 108°$

03 **C**

Completando o triângulo, tem-se o seguinte:

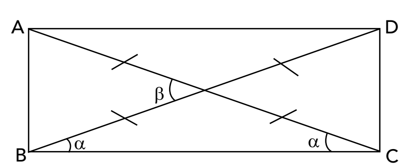


I. $x = c + 40°$ (ângulo externo do triângulo)

II. $a + b + x = 180°$ (soma dos ângulos internos do Δ)
$a + b + c + 40° = 180°$
$S + 40° = 180°$
$S = 140°$

04 **D**

Em um retângulo, as diagonais são iguais e cortam-se ao meio. Logo, tem-se triângulos isósceles cujos ângulos da base são iguais.

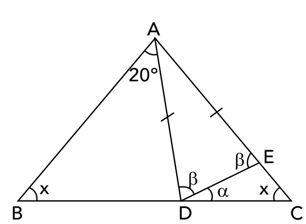


$\beta = \alpha + \alpha$ (ângulo externo do triângulo)

$\beta = 2 \cdot (20°) = 40°$

05 **B**

Os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são iguais, pois $\overline{AB} = \overline{AC}$, enquanto os ângulos $A\hat{D}E$ e $A\hat{E}D$ são iguais, pois $\overline{AD} = \overline{AE}$.

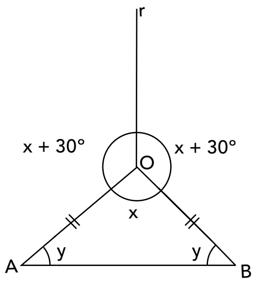


I. O ângulo $A\hat{E}D$ é externo ao triângulo CDE: $\beta = x + \alpha$.

II. O ângulo $A\hat{D}C$ é externo ao triângulo ABD.
$\beta + \alpha = x + 20°$
$\cancel{x} + \alpha + \alpha = \cancel{x} + 20°$
$2\alpha = 20°$
$\alpha = 10°$

06 **A**

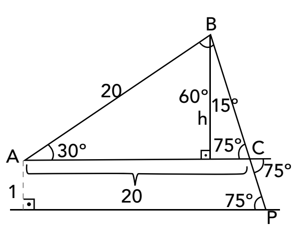
Tem-se o seguinte modelo matemático, no qual o triângulo $A\hat{O}B$ é isósceles de base AB:



I. $x + (x + 30°) + (x + 30°) = 360°$ (uma volta)
$3x = 300°$
$x = 100°$

II. $x + y + y = 180°$
$100° + 2y = 180°$
$y = 40°$

07 **A**

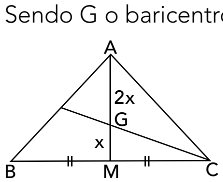


Tem-se o seguinte:

I. $\hat{P} = \hat{C} = 75°$ (correspondentes de retas paralelas) e $A\hat{B}C = \hat{C} = 75°$ ($\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$).
II. No triângulo ABC:
$\hat{A} + 75° + 75° = 180° \Rightarrow \hat{A} = 30°$
III. Traçando a altura (h) relativa ao lado $\overline{AC}$:
sen $30° = \dfrac{h}{20} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow h = 10$
Logo, a altura da pipa será 10 + 1 = 11 m.

08 **A**

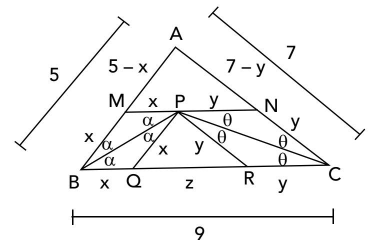
Sendo G o baricentro, tem-se o seguinte:



Sabe-se que $\overline{AM} = 12$, então:
$2x + x = 12$
$x = 4$
Logo, $AG = 2 \cdot x = 8$.

09 **D**

As bissetrizes dividem os respectivos ângulos ao meio. Logo, tem-se o seguinte:



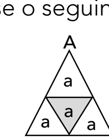
I. $P\hat{B}M = Q\hat{B}P = \alpha$ e $N\hat{C}P = R\hat{C}P = \theta$
($\overline{BP}$ e $\overline{CP}$ são bissetrizes)

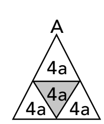
II. $Q\hat{B}P = M\hat{P}B = \alpha$; $M\hat{B}P = Q\hat{P}B = \alpha$ e
$R\hat{C}P = N\hat{P}C = \theta$; $N\hat{C}P = R\hat{P}C = \theta$
(alternos internos de retas paralelas)

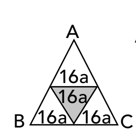
III. Os triângulos BMP e BQP são isósceles de base BP e os triângulos PNC e PRC são isósceles de base PC. Daí,
$BM = MP = x \Rightarrow AM = 5 - x$ e $CN = PN = y \Rightarrow$
$AN = 7 - y$.
Logo, o perímetro AMN = AM + MN + AN
$= (5 - x) + (x + y) + (7 - y) = 12$ cm.

IV. MPQB e NCRP são paralelogramos (apresentam os lados opostos paralelos), e os paralelogramos têm os lados opostos, além de paralelos, iguais.
Então, $BQ = MP = x$ e $RC = PN = y$.
Logo, o perímetro$_{PQR}$ $= x + z + y = BC = 9$ cm.
Portanto, a razão procurada é $= \dfrac{12 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = \dfrac{4}{3}$.

10 As bases médias do triângulo o dividem em quatro triângulos congruentes. Logo, eles têm a mesma área. Então, tem-se o seguinte:

I.  Área 1 = 4a

II.  Área 2 = $4 \cdot (4a) = 16a$

III.  Área ABC = $4 \cdot (16a) = 64a$

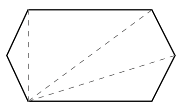
IV. Área sombreada = a + 4a + 16a = 21a

V. Razão = $\dfrac{21a}{64a} = \dfrac{21}{64}$

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 85

01 **D**

Traçando as diagonais de mesmo vértice do hexágono, obtêm-se 4 triângulos.



A soma dos 6 ângulos internos do hexágono corresponde à soma dos ângulos internos dos 4 triângulos. Assim, a soma dos ângulos internos do hexágono será a seguinte:

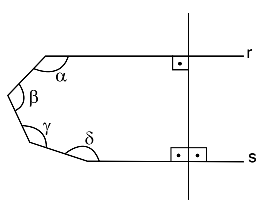
$$S_i = 4 \cdot (180°) = 720°$$

De modo geral, para um polígono de **n** lados, a soma dos ângulos internos é $S_i = (n - 2) \cdot 180°$.

No caso, $S_i = (6 - 2) \cdot 180° = 720°$.

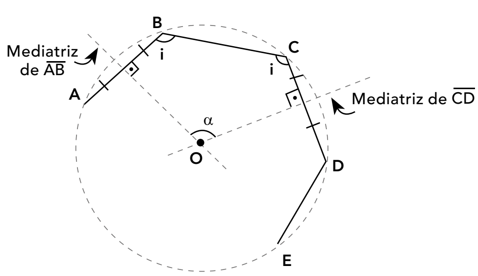
02 **E**

Traçando uma perpendicular às retas **r** e **s**, tem-se um hexágono.



Soma dos ângulos internos = $\alpha + \beta + \lambda + \delta + 90° + 90° =$
$= (6 - 2) \cdot 180° \Rightarrow \alpha + \beta + \lambda + \delta = 720° - 180° = 540°$

03



Sendo **n** o número de lados do polígono ABCDE..., o seu número de diagonais será $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$. Deve-se ter:

I. $d = \dfrac{5}{2} \cdot n \Rightarrow \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5}{2} \cdot n$

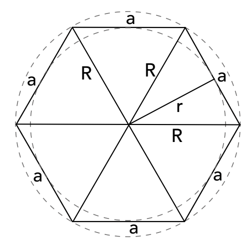
Como $n \neq 0$, fazendo os devidos cancelamentos, obtém-se: $n - 3 = 5 \Rightarrow n = 8$.

II. $i = \dfrac{(n-2) \cdot 180''}{n} \Rightarrow i = \dfrac{(8-2) \cdot 180''}{8} \Rightarrow i = 135''$

III. Soma dos ângulos internos do pentágono =
$90° + i + i + 90° + \alpha$
$(5 - 2) \cdot 180° = 180° + 2 \cdot i + \alpha$
$(3) \cdot 180° = 180° + 270° + \alpha$
$540° - 450° = \alpha$
$\alpha = 90°$

04

- Para o hexágono regular:

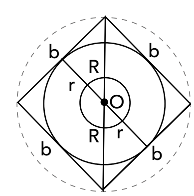


I. Lado = a = R = 12 cm (dado)

II. Apótema = $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero de lado a = R = 12 cm)

$r = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm

- Para o quadrado:



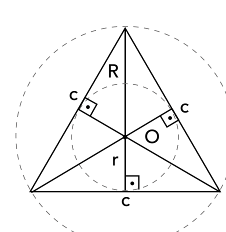
I. $2R = b\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado de lado **b**):
$2 \cdot (12) = b\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \dfrac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$ cm (lado do quadrado)

II. $2r = b \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm (apótema do quadrado)

- Para o triângulo equilátero:



I. R = 2r (propriedade do baricentro; no triângulo equilátero, circuncentro = baricentro):
$12 = 2r \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 6$ cm (apótema do triângulo equilátero)

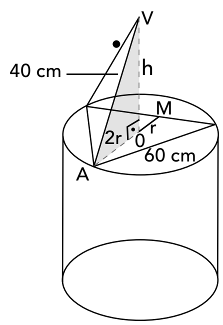
II. $R + r = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero de lado **a**):

$12 + 6 = \dfrac{c\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \dfrac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$ cm (lado do triângulo equilátero)

05 **C**

Em um triângulo equilátero, o circuncentro (O) coincide com o baricentro. Logo, tem-se o seguinte:



I. $r + 2r = \dfrac{60\sqrt{3}}{2}$ (AM é altura e mediana do $\triangle$ equilátero).

$3r = 30\sqrt{3}$

$r = 10\sqrt{3}$ e $2r = 20\sqrt{3}$

II. Teorema de Pitágoras no $\triangle$AVO:

$(AV)^2 = (2r)^2 + h^2$

$40^2 = (20\sqrt{3})^2 + h^2$

$1\,600 = 1\,200 + h^2$

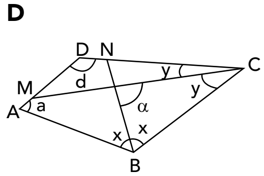
$h = 20$ cm

Logo, a altura total é:

1,50 m + 20 cm = 150 cm + 20 cm = 170 cm.

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 86

01 **D**



I. Ângulos internos do triângulo:

$x + y + \alpha = 180°$

$x + y = 180° - \alpha$

II. Ângulos internos do quadrilátero:

$a + d + 2x + 2y = 360°$

$a + d + 2 \cdot (x + y) = 360°$

$a + d + 2 \cdot (180° - \alpha) = 360°$

$a + d + 360° - 2\alpha = 360°$

$a + d = 2\alpha$

02 **D**

Sendo **x** a medida do ângulo interno remanescente (não somado), deve-se ter o seguinte:

Soma dos **n** ângulos = $1\,900° + x = (n - 2) \cdot 180°$

$x = 180° \cdot n - 360° - 1\,900°$

$180° \cdot n = 2\,260° + x$

No qual deve-se ter o seguinte:

- **n** inteiro maior ou igual a 3.
- $0° < x < 180°$ (**x** é ângulo interno do polígono)

Isso mostra que 2260 + x é múltiplo de 180 e maior que 2260 (é igual a 180 vezes o inteiro **n**). Dividindo, então, 2260 por 180:

$2260° : 180 \cong 13$

Assim, o múltiplo de 180, próximo e maior que 2260, é $(180) \cdot 13 = 2\,340$. Logo, tem-se:

- $180° \cdot n = 2\,340° \Rightarrow n = 13$
- $2\,260° + x = 2\,340° \Rightarrow x = 80°$

03 Observe, no exemplo dado, que ao redor de cada bolha tem-se 360° e que a soma dos ângulos internos dos triângulos obtidos equivale à soma dos ângulos ao redor das bolhas mais a soma dos ângulos internos do pentágono. Logo, deve-se ter o seguinte:

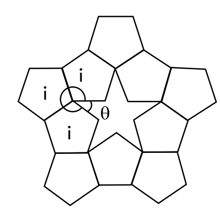
Ângulos de T triângulos = $n \cdot (360°)$ + (soma dos ângulos internos do pentágono).

$T \cdot (180°) = 360° \cdot n + (5 - 2) \cdot 180°$

Dividindo por 180°, obtém-se:

$T = 2n + 3$.

04 **D**



I. $\mathbf{i} = \dfrac{(n-2) \cdot 180''}{n} = \dfrac{(5-2) \cdot 180''}{5} = 108''$

II. $i + i + i + \theta = 360°$

$324° + \theta = 360°$

$\theta = 36°$

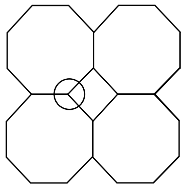
05 **B**

A soma dos ângulos internos ao redor de um ponto deve ser igual a 360°. O ângulo interno de um octógono é 135°.

I. Usando um octógono em torno de um ponto, ficam faltando 360° – 135° = 225° (não é divisível por nenhum dos ângulos dados, não convém).

II. Usando dois octógonos em torno de um ponto, ficam faltando 360° – 2 · (135°) = 90° (pode ser preenchido com um quadrado).

Logo, para preencher todos os espaços em torno de um ponto, sem sobreposição, pode-se utilizar dois octógonos e um quadrado.



Cada ângulo interno do octógono regular mede 135° e cada ângulo interno do quadrado mede 90°.

Somando 135° + 135° + 90° = 360°. Portanto, o polígono pedido é o quadrado.

06 Em um triângulo equilátero, o incentro, o circuncentro e o baricentro coincidem. Logo, tem-se o seguinte:

I. R = 2r (propriedade do baricentro):

$8 = 2r$

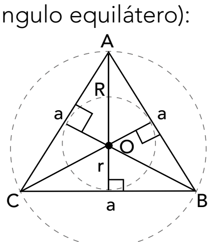
$r = 4$ cm

II. $R + r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero):

$8 + 4 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$a = \dfrac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}\,\text{cm}$

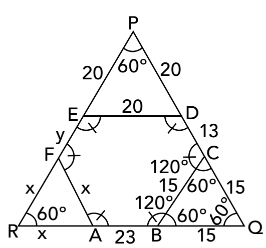
$a = 8 \cdot (1{,}7) = 13{,}6$ cm



07 Cada ângulo interno do hexágono equiângulo mede:

$$i = \frac{(n-2)\cdot 180''}{n} = \frac{(6-2)\cdot 180''}{6} = 120''.$$

Prolongando os lados, obtém-se o triângulo equilátero BCQ:



De modo análogo, os triângulos ARF e EPD também são equiláteros. Como o triângulo maior PRQ também é equilátero, tem-se o seguinte:

I. RQ = PQ

$x + 23 + 15 = 15 + 13 + 20$

$x = AF = 10$

II. RP = PQ

$x + y + 20 = 48$

$10 + y = 28$

$y = 18$

Logo, o perímetro do hexágono é dado por:

$23 + 15 + 13 + 20 + y + x = 99.$

08 a) Observando que **x** se opõe ao maior cateto, **x** é o ângulo externo do hexágono menor, ou seja:

$x = \dfrac{360°}{6} = 60°.$

Logo, o ângulo interno do hexágono menor mede

$180° - x = 120°.$

b) Como o triângulo ABC é retângulo, tem-se:

$x + y + 90° = 180°$

$x = 60°$

$60° + y + 90° = 180°$

$y = 30°$

c) Na figura 1:

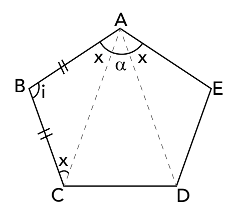
$\cos 60° = \dfrac{3}{AB} \Rightarrow AB = 6$

Observando a figura 2, percebe-se que o lado do hexágono menor é a hipotenusa AB menos o cateto menor. Logo, tem-se o seguinte:

Lado do hexágono menor = AB – 3 = 6 – 3 = 3.

Logo, o perímetro do hexágono menor é 6 · 3 = 18 cm.

09 **C**



Como AB = BC ⇒ ABC é isósceles de base AC. Logo, os ângulos da base são iguais. Tem-se o seguinte:

I. $i = \dfrac{(5-2)\cdot 180''}{5} \Rightarrow i = 108''.$

II. $i + x + x = 180°$

$108° + 2x = 180°$

$x = 36°$

III. $x + \alpha + x = i$

$36° + \alpha + 36° = 108°$

$\alpha = 36°$

10 **B**

Sendo **n** o número de lados, tem-se o seguinte:

$(n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 130° + 128 \cdot (n - 2)$

$180n - 360° = 260 + 128n - 256$

$180n - 128n = 360 + 260 - 256$

$52n = 364$

$n = 7$