Resoluções

Capítulo 8

Pirâmide

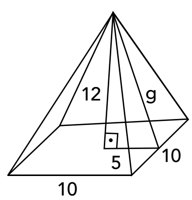
ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 7

01 **B**

Se $A_b = 100\ m^2 \Rightarrow \ell$ = lado da base = 10 m.

Tem-se também que h = 12 m.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, é possível encontrar o apótema da pirâmide (g):



$$g^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow g = 13\ m$$

$$A_b = 100\ m^2;\ A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{10 \cdot 13}{2}\right) = 4 \cdot 65 = 260\ m^2$$

$$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 360\ m^2$$

02 a) **m** será igual à altura de um triângulo equilátero de lado 4 cm

$$\Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{3}\ cm.$$

b) Usando a relação $g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 12 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{21}$ cm

c) Usando o Teorema de Pitágoras em VOD:

$\Rightarrow 3^2 + 4^2 = \overline{VD}^2 \Rightarrow \overline{VD}^2 = 25 \Rightarrow \overline{VD}$ = aresta lateral = 5 cm

d) A área da base (A_b) do hexágono regular é 6 vezes a área do triângulo equilátero de lado ℓ = 4 cm:

$$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) = 6 \cdot \left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}\ cm^2$$

A área lateral (A_ℓ) da pirâmide é 6 vezes a área de uma face triangular de base ℓ e altura **g**:

$$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{\ell \cdot g}{2}\right) = 6 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{21}}{2} \Rightarrow A_\ell = 12\sqrt{21}\ cm^2$$

Então, a área total (A_t) é obtida, fazendo: $A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow$

$$A_t = 24\sqrt{3} + 12\sqrt{21} \Rightarrow A_t = 12\sqrt{3}(2 + \sqrt{7})\ cm^2$$

03 **C**

Sabe-se que tal altura é dada por $g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, em que **a** é a aresta do tetraedro. Assim, $5 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = 10 \Rightarrow a = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$$A_t = a^2\sqrt{3} = \frac{100}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ cm^2.$$

04 É necessário calcular a área lateral da pirâmide e diminuir a área de uma face triangular:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{(2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\ m$$

$$g^2 = m^2 + h^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow g = 5\ m$$

Seja A_f a área de uma face lateral:

$$A_f = \frac{2\sqrt{3} \cdot 5}{2} \Rightarrow A_f = 5\sqrt{3}\,m^2$$

Logo: $A_{necessária} = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}\ m^2$

05 **A**

Se **h** é a altura da pirâmide:

$$\left.\begin{aligned} &A_{\ell_{prisma}} = 4 \cdot 2a \cdot h = 8ah \Rightarrow \frac{3}{4} A_{\ell_{prisma}} = 6ah \\ &A_{face} = \frac{2 \cdot a \cdot a_p}{2} = a \cdot g \\ &A_{\ell_{pirâmide}} = 4 \cdot A_{face} = 4 \cdot a \cdot g \end{aligned}\right\} g = \frac{3}{2}h \Rightarrow$$

$$g^2 = h^2 + m^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow g = \sqrt{h^2 + a^2} \Rightarrow \frac{3}{2}h = \sqrt{h^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}h^2 = h^2 + a^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}h^2 = a^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$$

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 7

01 **E**

$A_t = A_\ell + A_b$

$A_b = 80^2 = 6\,400\ mm^2$

$$A_\ell = 4 \cdot A_{face} = 4 \cdot \left(\frac{\overset{40}{\cancel{80}} \cdot g}{\cancel{2}}\right) = 160 \cdot g$$

$$m = \frac{80}{2} = 40$$

$$g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 40^2 + 30^2 = 2\,500 \Rightarrow g = 50 \text{ mm}$$

Então: $A_\ell = 8\,000 \Rightarrow A_t = 8\,000 + 6\,400 = 14\,400 \text{ mm}^2$

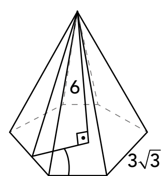
02 $m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = 12 \text{ cm} \Rightarrow A_b = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$$A_\ell = 4 \cdot A_{face} = 4 \cdot \left(\frac{\overset{6}{\cancel{12}} \cdot g}{\cancel{2}}\right) = 24g$$

$$g^2 = m^2 + h^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow g = 10 \text{ cm} \Rightarrow A_\ell = 240 \text{ cm}^2$$

Logo: $A_t = 384 \text{ cm}^2$

03



$$\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$$

m = altura de um triângulo equilátero de lado $3\sqrt{3}$

$$m = (3\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$$

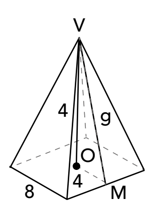
$$A_b = \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \left(\frac{\left(\frac{9}{2}\right) \cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = \frac{81\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

$$A_\ell = 6 \cdot A_{face} = 6 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3} \cdot g}{2}\right) = 9\sqrt{3} \cdot g$$

$$g^2 = m^2 + h^2 = \frac{81}{4} + 36 = \frac{225}{4} \Rightarrow g = \frac{15}{2} \Rightarrow A_\ell = \frac{135\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

$$A_t = \frac{81\sqrt{3}}{2} + \frac{135\sqrt{3}}{2} = \frac{216\sqrt{3}}{2} = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

04 **B**

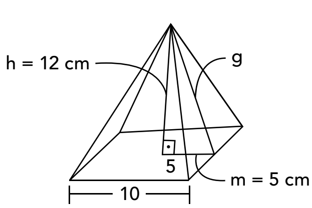


$$A_b = 64 \text{ m}^2 \Rightarrow \ell = 8 \Rightarrow m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = 4$$

$$A_\ell = 4 \cdot A_{face} = 4 \cdot \left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot g}{\cancel{2}}\right) = 16 \cdot g$$

$$g^2 = m^2 + h^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow g = 4\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow A_\ell = 64\sqrt{2} \text{ m}^2$$

05 **E**



Área do papel = $20^2 = 400 \text{ cm}^2$

$m = 5$; $\ell = 10$; $A_b = 100 \text{ cm}^2$

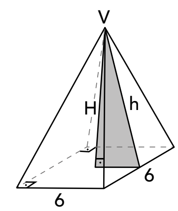
$$A_\ell = 4 \cdot A_{face} = 4 \cdot \left(\frac{10 \cdot g}{2}\right) = 20 \cdot g$$

$$g^2 = m^2 + h^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow g = 13 \text{ cm}$$

$A_\ell = 20 \cdot 13 = 260 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_t = 360 \text{ cm}^2$

Sobram = 400 – 360 = 40 cm² = 10% de 400 cm²

06 **C**

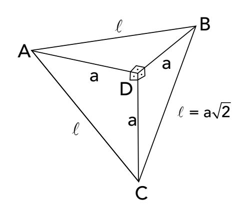


$$\left.\begin{aligned} &A_b = 6^2 = 36 \Rightarrow A_\ell = 10 \cdot A_b = 360 \text{ m}^2 \\ &A_\ell = 4 \cdot A_{face} \Rightarrow 360 = 4 \cdot \left(\frac{6 \cdot g}{2}\right) = 12g \end{aligned}\right\} g = 30 \text{ m}$$

$$m = \frac{6}{2} = 3 \text{ m}; \; g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow 900 = 9 + h^2 \Rightarrow h^2 = 891$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{891} < 30 \text{ e } h > 20$$

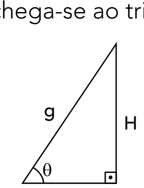
07



Note que a aresta da base ℓ = diagonal de um quadrado de lado **a**.

$$\left.\begin{aligned} &\ell = a\sqrt{2} \Rightarrow A_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \\ &A_\ell = 3 \cdot \left(\frac{a \cdot a}{2}\right) = \frac{3a^2}{2} \end{aligned}\right\} A_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3a^2}{2} = \frac{a^2(3+\sqrt{3})}{2}$$

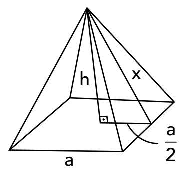
08 Já se sabe que $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Traçando os apótemas da base (m) e da pirâmide (g), chega-se ao triângulo retângulo:



Em que θ é o ângulo entre duas faces do tetraedro $g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{H}{g} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

09 **B**



$A_\ell - A_b = \frac{3h^2}{2}$. Se **a** é a aresta da base $\Rightarrow A_b = a^2$

$A_\ell = 4 \cdot A_{face} = 4 \cdot \left(\frac{a \cdot g}{2}\right) = 2 \cdot a \cdot g$

$g^2 = m^2 + h^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 \Rightarrow g^2 = \frac{a^2 + 4h^2}{4} \Rightarrow g = \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{2}$

$A_\ell = a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}$

$A_\ell = a^2 + \frac{3h^2}{2} \Rightarrow a\sqrt{a^2 + 4h^2} = a^2 + \frac{3h^2}{2}$, elevando ao quadrado:

$a^2(a^2 + 4h^2) = a^4 + 3a^2h^2 + \frac{9h^4}{4} \Rightarrow \cancel{a^4} + 4a^2h^2 = \cancel{a^4} + 3a^2h^2 + \frac{9h^4}{4}$

$\Rightarrow a^2 \cancel{h^2} = \frac{9h^{\cancel{4}\,2}}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{9h^2}{4} \Rightarrow a = \frac{3h}{2}$

10 **E**

$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ e $m = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$A_\ell = 3 \cdot A_{face} = 3 \cdot \left(\frac{a \cdot g}{2}\right)$

$g^2 = m^2 + h^2 = \frac{a^2 \cancel{3}}{\cancel{36}_{12}} + 9a^2 = \frac{109a^2}{12} \Rightarrow g = \frac{a\sqrt{109}}{2\sqrt{3}}$

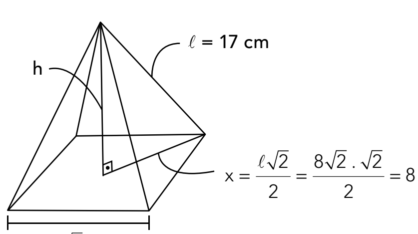
$A_\ell = \frac{3 \cdot a \cdot a\sqrt{109}}{4\sqrt{3}} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{327}}{12} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$

$\frac{3a^2\sqrt{327}}{12} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{\cancel{3}a^2(\sqrt{3} + \sqrt{327})}{\cancel{12}} = \frac{a^2(\sqrt{3} + \sqrt{327})}{4} =$

$\frac{a^2\sqrt{3}(1 + \sqrt{109})}{4}$

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 13

01 **B**



Cálculo da metade de sua diagonal:

$x = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{8 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 8$

Cálculo da altura:

$17^2 = 8^2 + h^2$

$289 = 64 + h^2$

$h^2 = 225$

$h = 15$ cm

Cálculo da área de sua base:

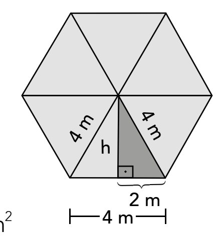
$B = \ell^2 = (8\sqrt{2})^2 = 64 \cdot 2 = 128$ cm^2

Cálculo do volume:

$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 15 = 640$ cm^3

02 A área B da base da pirâmide é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 4 m. Sendo **h** a altura do triângulo equilátero, tem-se, pelo Teorema de Pitágoras:

$h^2 + 2^2 = 4^3 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$ m



A área do triângulo equilátero é:

$A = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$ m^2 $\Rightarrow$ $A = 4\sqrt{3}$ m^2

Logo, a área B do hexágono é:

$B = 6A \Rightarrow B = 6 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow B = 24\sqrt{3}$ cm^2

Assim, o volume V da pirâmide é:

$V = \frac{1}{3}BH \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow v = 96\sqrt{3}$ m^3

03 **A**

As faces do poliedro inscrito são triângulos equiláteros de lado **a**. Logo:

$8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

A distância entre dois vértices opostos do poliedro é a medida da aresta do cubo. Essa distância é a diagonal do quadrado de lado $2\sqrt{2}$, ou seja, 4.

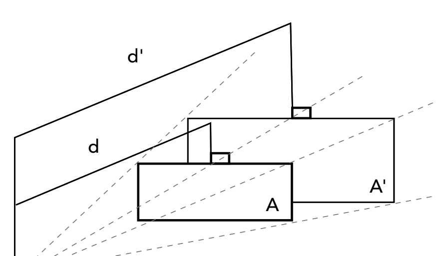
O volume do cubo é, assim, $4^3 = 64$.

04 Área $= 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4} \cdot 4 + \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Área $= 24 + \frac{16 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = 24 + 8\sqrt{3} = 8(3 + \sqrt{3})$ cm^2

Volume $= \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4} = \frac{32}{3}$ cm^3

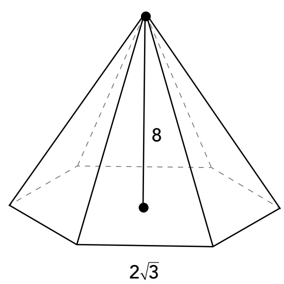
05 **A**



$$A' = A + \frac{50}{100}A$$
$$A' = 1{,}5A$$
$$\left(\frac{d}{d'}\right)^2 = \frac{A}{A'} \Rightarrow \left(\frac{2}{d'}\right)^2 = \frac{A}{1{,}5A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (d')^2 = 1{,}5 \cdot 4 \Rightarrow (d')^2 = 6 \Rightarrow d' = \sqrt{6}\ \text{m}$$

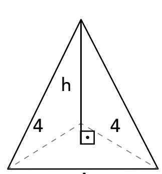
ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 14

01 **C**

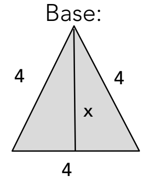


$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$
$$A_b = 6 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{3} \cdot \cancel{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 18\sqrt{3}$$
$$V = \frac{{}^{6}\cancel{18}\sqrt{3} \cdot 8}{\cancel{3}} = 48\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

02 **C**



Base:



$$x = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = h$$
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$
$$V = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = 8\ \text{cm}^3$$

03 a) Nas condições dadas, tem-se $\overline{HY} = \overline{AX}$ e $\overline{HY} \,//\, \overline{AX}$. Isso significa que o quadrilátero AXYH é um paralelogramo. Como $\overline{HA}$ é uma diagonal de face do cubo, tem-se $\overline{XY} = \overline{AH} = a\sqrt{2}$.

b) Tem-se: $\overline{GY} = \overline{HY} = \overline{AX} = \overline{BX} = \frac{a}{2}$;

$\overline{HE} = \overline{EA} = \overline{BC} = \overline{CG} = a$;

$\overline{YH} \perp \overline{HE}$; $\overline{EA} \perp \overline{AX}$; $\overline{XB} \perp \overline{BC}$ e $\overline{CG} \perp \overline{GY}$.

Logo, $\Delta YHE \cong \Delta XAE \cong \Delta XBC \cong \Delta YGC$ e, assim, conclui-se que $\overline{YE} = \overline{EX} = \overline{XC} = \overline{CY}$, ou seja, o quadrilátero XCYE é um losango.

$\overline{EC}$ é diagonal do cubo, logo $\overline{EC} = a\sqrt{3}$. Assim, a área do losango XCYE é:

$$\frac{1}{2}\overline{EC} \cdot \overline{XY} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$

c) O plano contendo a base XCYE passa pelo centro do cubo e, por isso, o divide em dois sólidos de mesmo volume, igual a $\frac{a^3}{2}$.

Retirando do sólido com vértice F as pirâmides CFGY e BCFX, obtém-se a pirâmide de vértice F e base XCYE.

O volume das pirâmides CFGY e BCFX é igual a:

$$\frac{1}{3} \cdot A_{\triangle XBF} \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{2} \cdot a = \frac{a^3}{12}$$

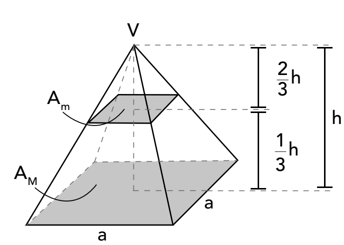
Assim, o volume procurado é:

$$V = \frac{a^3}{2} - 2 \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{6} = \frac{3a^3 - a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$$

04 **E**

$$V_1 = V_{prisma} = A_b \cdot H$$
$$V_2 = V_{pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$
$$V_1 = \frac{V_2}{2}$$
$$A_b \cdot H = \frac{A_b \,.\, h}{3 \cdot 2}$$
$$h = 6H$$

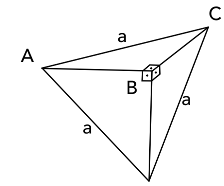
05 **D**



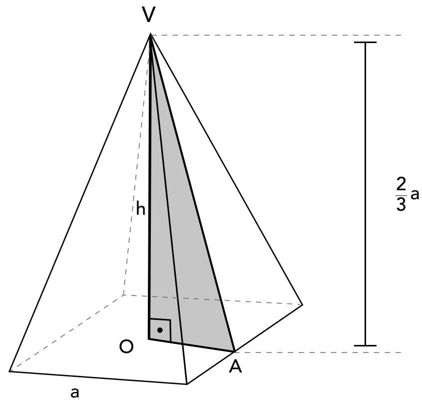
$$2p = 12;\ a = \frac{12}{4} \Rightarrow a = 3$$
$$\left(\frac{\frac{2}{3}h}{h}\right)^2 = \frac{A_m}{A_M} \Rightarrow \frac{\frac{4h^2}{9}}{h^2} = \frac{A_m}{9} \Rightarrow$$
$$A_m = 4\ \text{m}^2$$

06

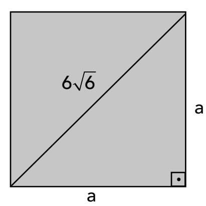
$$V_C = V_{cubo} = a^3$$
$$V_P = V_{pirâmide_{ABCN}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$$
$$V_{sr} = V_{sólido\ restante} = V_C - V_P$$
$$V_{sr} = a^3 - \frac{a^3}{6}$$
$$V_{sr} = \frac{5}{6}a^3$$



07 **C**



Base:

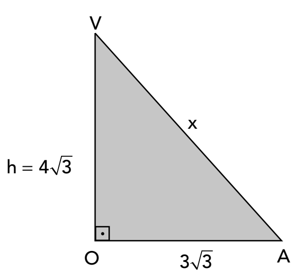


$2a^2 = 36 \cdot 6$

$a^2 = 36 \cdot 3 \Rightarrow a^2 = 108 = A_b$

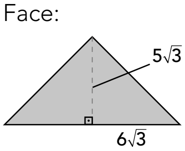
$h = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

No ΔVOA:



$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = 48 + 27 \\ x = \sqrt{75} \\ x = 5\sqrt{3} \end{matrix}$$

Face:



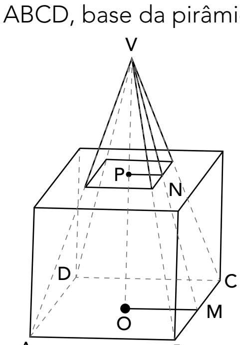
$\Rightarrow A_f = \frac{6\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}}{2}$

$A_f = 45$

$A_t = 4A_f + A_b \Rightarrow A_t = 4 \cdot 45 + 108$

$A_t = 288\ cm^2$

08 Na figura a seguir, admite-se que a base do cubo coincide com o quadrado ABCD, base da pirâmide.



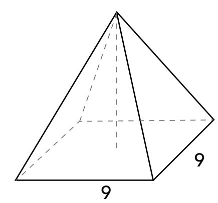
Sendo V o vértice da pirâmide, sua projeção ortogonal O sobre a base coincide com o centro da figura geométrica. Seja M o ponto médio da aresta $\overline{BC}$, de medida ℓ. Seja P o centro do quadrado em que a face oposta à base do cubo corta a pirâmide. O segmento $\overline{VM}$ intercepta este quadrado no ponto N, ponto médio de uma aresta do sólido.

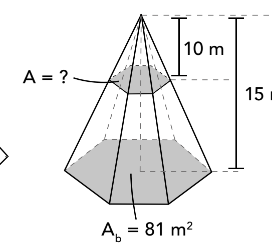
Sendo $\overline{PN} \parallel \overline{OM}$, conclui-se que ΔVPN ~ ΔVOM, logo: $\frac{\overline{VP}}{\overline{VO}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{OM}}$. Como $\overline{VO} = 20$; $\overline{PO} = \ell$; $\overline{OM} = \frac{\ell}{2}$ e $\overline{PN} = \frac{5}{2}$, tem-se:

$$\frac{20 - \ell}{20} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \ell^2 - 20\ell + 100 = 0 \Rightarrow \ell = 10$$

Assim, o volume do cubo é $\ell^3 = 10^3 = 1\,000\ cm^3$.

09 **A**

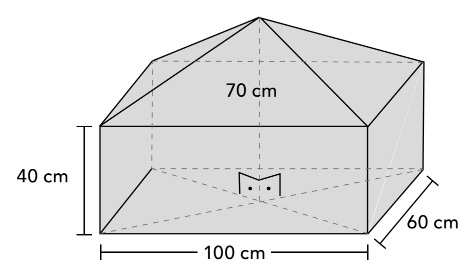




$A_b = 81\ m^2$

$$\left(\frac{10}{15}\right)^2 = \frac{A}{81} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{A}{81} \Rightarrow A = 36\ m^2$$

10 **D**



Volume do paralelepípedo:

$V = 100 \cdot 60 \cdot 40$

$V = 240\,000\ cm^3$

Volume da pirâmide:

$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 100 \cdot 60 \cdot \cancel{30}^{10}$

$V = 1000 \cdot 60 = 60\,000$

Volume do sólido:

$V_s = 240\,000 + 60\,000$

$V_s = 300\,000\ cm^3 = 300\ dm^3$

Portanto:

$\frac{30\cancel{0}}{2\cancel{0}} = 15$