Resoluções

Capítulo 1

Geometria de posição

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 14

01 a) Postulado, pois os postulados são constatações que não necessitam ser comprovadas para que sejam consideradas verdadeiras.
b) Ponto, reta e plano.
c) Teoremas.

02 **C**

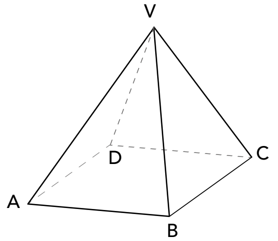
Como o prolongamento é infinito nos dois sentidos e em duas dimensões (comprimento e largura), tem-se a ideia de plano, elemento geométrico infinito com duas dimensões.

03 a) Infinitas.
b) Três retas.
c) Infinitos.
d) PL(VBC), PL(VAC) e PL(VAB).

04 a) PL(ABC) e PL(ABG) (dois planos).
Note que PL(ABC) = PL(ABCD) e PL(ABG) = PL(ABGH).
b) São 8 vértices ("cantos") e cada vértice pode ser ligado aos outros 7 vértices, determinando 7 retas. Logo, o total de retas seria $8 \cdot 7 = 56$. Porém, cada reta está sendo contada duas vezes. Por exemplo, $\overleftrightarrow{AB}$ é igual a $\overleftrightarrow{BA}$. Logo, tem-se $56 : 2 = 28$ retas.

05 Determinam sete planos.

Além dos planos das 5 faces, tem-se os planos que contêm as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ da base, juntamente com o vértice V.

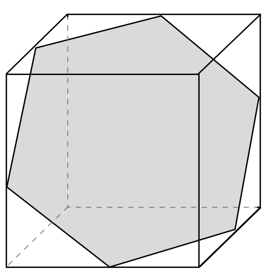


Os sete planos determinados são PL(ABCD), PL(VAB), PL(VBC), PL(VDC), PL(VDA), PL(VAC) e PL(VBD).

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 14

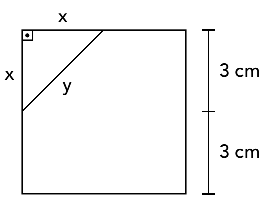
01 **F, V, V, F, V, F, V, V**
(F) O ponto, a reta e o plano são exemplos de conceitos primitivos.
(V)
(V)
(F) Por dois pontos **distintos**, passa uma única reta.
(V)
(F) Dois pontos **distintos** determinam uma única reta que passa por eles.
(V)
(V)

02 A interseção de um plano com uma face (quadrado) do cubo é um segmento. Assim, o polígono tem seis lados e é um hexágono. Veja.



Sendo **x** cm a medida do lado do hexágono, tem-se o seguinte:

I. Na face (quadrado) do cubo:

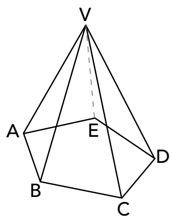


$$x = 3 \text{ cm}$$
$$y^2 = 3^2 + 3^2$$
$$y^2 = 18$$
$$y = \sqrt{18}$$
$$y = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

II. Perímetro do hexágono regular = $6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ cm.

03 Mesas com três pernas não balançam porque três pontos não colineares determinam um único plano (postulado da determinação de plano).

04 Pode-se imaginar uma pirâmide na qual a base é um pentágono regular, cujos vértices são os pontos A, B, C, D e E. O ponto V é o vértice da pirâmide (ponto fora do plano da base).

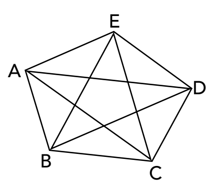


Assim, dentre esses seis pontos, não existem três alinhados; as retas determinadas por dois quaisquer desses pontos são distintas. São elas:

- As cinco retas que contêm as cinco "quinas" inclinadas (arestas laterais):

$$\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}, \overleftrightarrow{VC}, \overleftrightarrow{VD} \text{ e } \overleftrightarrow{VE}$$

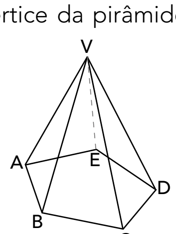
- As cinco retas que contêm os cinco lados do pentágono (arestas da base): $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{EA}$.
- As cinco retas que contêm as cinco diagonais do pentágono (diagonais da base): $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CE}$.



Ao todo, são 5 + 5 + 5 = 15 retas.

É possível, também, contar essas retas de outra maneira. Cada um dos seis pontos pode ser ligado a cinco pontos (cada um dos seis pontos determina cinco retas). Logo, $6 \cdot 5 = 30$ retas. Desse modo, cada reta foi contada duas vezes (a reta $\overleftrightarrow{VA}$, por exemplo, foi contada no ponto A e, novamente, no ponto V). Assim, o número correto de retas determinadas é $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

05 Pode-se imaginar uma pirâmide na qual a base é um pentágono regular, cujos vértices são os pontos A, B, C, D, E. O ponto V é o vértice da pirâmide (ponto fora do plano da base).



Assim, os cinco pontos coplanares A, B, C, D, E determinam um mesmo plano (o plano da base da pirâmide). Qualquer outro plano determinado deve conter o ponto V e dois pontos da base. São eles PL(VAB), PL(VAC), PL(VAD), PL(VAE), PL(VBC), PL(VBD), PL(VBE), PL(VCD), PL(VCE) e PL(VDE). Ao todo, tem-se 1 + 10 = 11 planos determinados.

06 **F, V, F, F, V, V**

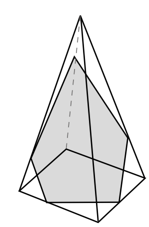
(F) O paralelogramo é uma região limitada pelos lados. O plano é ilimitado.
(V)
(F) Três pontos determinam uma reta se estes estiverem alinhados.
(F) Três pontos não alinhados determinam um plano.
(V)
(V)

07 **V, V, F, V**

(V)
(V)
(F) Os pontos da diagonal pertencem ao quadrado, mas a reta que contém a diagonal tem pontos fora do quadrado.
(V)

08 **C**

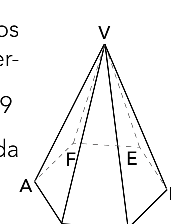
As faces da pirâmide são 4 triângulos e um quadrado (base). A interseção de um plano com cada uma das faces é um segmento de reta. Como o plano interceptará as cinco faces, o corte provocado pelo plano será um polígono de cinco lados (5 segmentos de reta).



O plano que contém o pentágono destacado (polígono de 5 lados) divide a pirâmide em duas partes. Considerando uma dessas partes, o pentágono destacado será uma de suas faces.

09 Cada um dos 8 vértices pode ser ligado aos 7 outros, determinando 7 retas. Seriam, portanto, $8 \cdot 7 = 56$ retas. No entanto, dessa maneira, cada reta foi contada duas vezes. Portanto, tem-se o número de retas $= \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

10 Tem-se o plano da base, os seis planos das faces laterais e mais os planos determinados por cada uma das $\dfrac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$ diagonais do hexágono e o vértice V da pirâmide. Total = 1 + 6 + 9 = 16 planos.



ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 27

01 **F, V, V, F, F**

(F) Os pontos podem ser alinhados.

(V) Três pontos coincidentes estão em um plano; três pontos alinhados estão em uma reta, e essa reta está contida em um plano; três pontos não alinhados determinam um plano.

(V) A reta só pode ser secante ao plano, contida no plano ou paralelo a ele. A reta secante ao plano tem apenas um ponto em comum com o plano, e a paralela não contida no plano não tem nenhum ponto em comum. Sobrou apenas a reta contida no plano.

(F) Pense em uma pirâmide de base triangular; existem quatro faces (quatro planos).

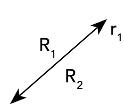
(F) As retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ do enunciado da questão seguinte, por exemplo, são paralelas entre si; no entanto, não estão contidas todas em um mesmo plano.

02 a) Retas $\overline{HE}$ e $\overline{GF}$.
b) Retas $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$.
c) Plano (ABG).
Observação: podem ser escolhidas três quaisquer das quatro letras A, B, G, H, em qualquer ordem, para identificar o plano.

03 **C**

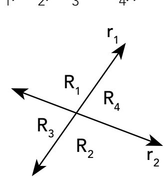
Sendo a_n o número máximo de fatias obtidas com **n** cortes, note que

- um corte (reta r_1) dividirá o bolo em duas fatias (regiões R_1 e R_2);



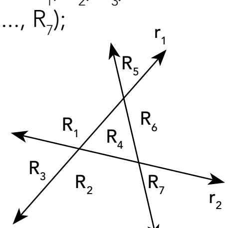
ou seja: $a_1 = 2$ regiões.

- dois cortes (retas r_1 e r_2) dividirão o bolo em quatro fatias (regiões R_1, R_2, R_3 e R_4);



ou seja, $a_2 = a_1 + 2$
$a_2 = 2 + 2 = 4$ regiões.

- três cortes (retas r_1, r_2, r_3) dividirão o plano em sete regiões (R_1, R_2, ..., R_7);



ou seja, $a_3 = a_2 + 3$
$a_3 = 2 + 2 + 3 = 7$ regiões.
Seguindo o padrão sugerido, tem-se:
$a_4 = a_3 + 4$
$a_4 = 2 + 2 + 3 + 4 = 11$ regiões.
Desse modo, cinco cortes determinarão, no máximo:
$a_5 = a_4 + 5$
$a_5 = 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16$ regiões (fatias).

04 O padrão da questão anterior sugere que o número de fatias obtidas (a_n) com **n** cortes pode ser dado por:

$a_n = 2 + (2 + 3 + 4 +... + n)$

Logo, pode-se dizer que:

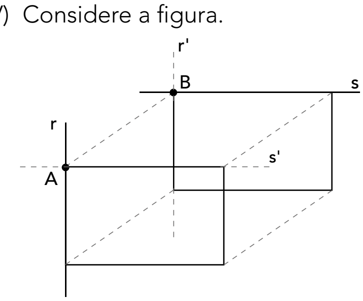
$a_n = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)$

$a_n = 1 + \dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$

Logo, $a_{10} = 1 + \dfrac{(1+10)\cdot 10}{2} = 56.$

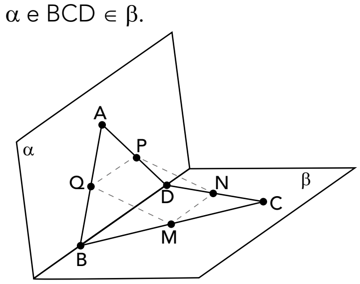
05 **D**

I. (F) Duas retas paralelas e coplanares não são concorrentes.
II. (F) Duas retas paralelas não têm ponto comum e não são reversas.
III. (V) Considere a figura.



Sejam **r** e **s** duas retas reversas.
Tomando um ponto A da reta **r**, existe uma única perpendicular comum a **r** e **s** que intercepta a reta **s** no ponto B, de tal modo que B $\in$ r' e r//r'. Analogamente, obtém-se a reta s'//s. Portanto, os planos α = (r, s') e β = (r', s) são os únicos planos paralelos, cada um contendo uma das retas.

IV. (V). Considere o quadrilátero reverso da figura, com ABD $\in \alpha$ e BCD $\in \beta$.



Como PQ é base média do triângulo ABD e MN é base média do triângulo BCD, segue que PQ//BD e MN//BD. Logo, PQ//MN. Similarmente, conclui-se que MQ PNP e, portanto, segue-se o resultado.

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 28

01 **D**

4 arestas ($\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$).

Note que a aresta $\overline{AD}$ não é reversa à reta **r**, pois existe o plano (ADFG) contendo $\overline{AD}$ e **r** ($\overline{AD}$ // r).

02 **A**

Há eclipse com o alinhamento do Sol, da Terra e da Lua. Logo, as retas $\overleftrightarrow{SL}$ e $\overleftrightarrow{TL}$ são paralelas coincidentes.

03 Note o padrão seguinte, em que a_n indica o número máximo de regiões para **n** retas:

$a_1 = 2$

$a_2 = 4 = 2 + 2$

$a_3 = 7 = 4 + 3 = 2 + 2 + 3$

$a_4 = 11 = 7 + 4 = 2 + 2 + 3 + 4$

Seguindo o padrão, tem-se:

$a_n = 2 + (2 + 3 + 4 + ... + n)$

$a_n = 1 + (1 + 2 + 3 + ... + n)$

$a_n = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$

Então, $211 = 1 + \frac{n + n^2}{2}$

$n^2 + n - 420 = 0$

$\Delta = 1 + 1\,680$

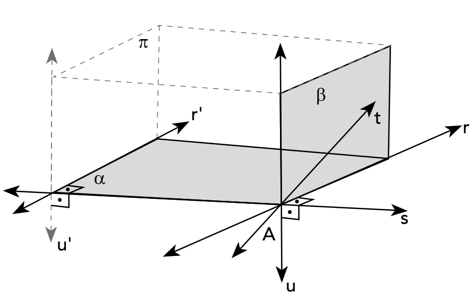
$\Delta = 1\,681$

$n = \frac{-1 \pm 41}{2}$ $\begin{cases} n = 20 \\ n = -21 \text{ (não convém)} \end{cases}$

Logo, estão sendo consideradas 20 retas.

04 **E**

Para trabalhar com planos perpendiculares, nada melhor que o paralelepípedo retângulo (uma caixa de sapatos). Considere, então, a figura seguinte relativa ao enunciado, em que **u** é uma reta contida em β perpendicular à reta **s**, passando em A.

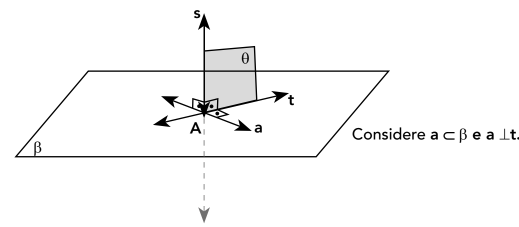


Analisando as afirmativas, tem-se o seguinte:

I. (V) A reta **s** é perpendicular a duas retas concorrentes (**r** e **u**) do plano β, então **s** é perpendicular ao plano β.

II. (V) A reta **s** é perpendicular ao plano β, então qualquer reta de β forma 90° com a reta **s** (qualquer reta de β é perpendicular ou ortogonal à reta **s**). Como a reta **t** contida em β é concorrente à reta **s**, **t** e **s** são retas perpendiculares.

III. (V) A reta **s** é perpendicular ao plano β, então qualquer plano que contenha **s** é perpendicular a β.



Note que a medida do ângulo entre os planos β e θ é a medida do ângulo entre as retas **a** e **s**, isto é, $\beta\,\hat{t}\,\theta = a\hat{A}s = 90°$.

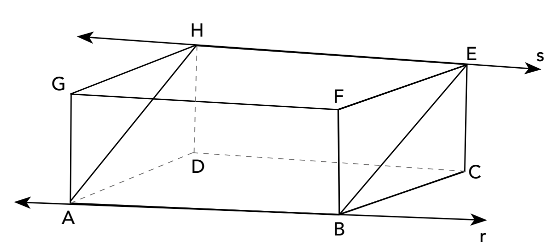
IV. (V) Veja, na figura, o plano **π** paralelo ao plano β.

05 a) Se as retas **r** e **s** são paralelas distintas, existe um único plano passando por **r** e **s**. Então, $A \cap B$ é um conjunto unitário.
Se as retas são paralelas coincidentes, então:
$A \cap B = A = B$

b) Se **r** e **s** são retas reversas, não existe um plano por elas. Logo, $A \cap B = \varnothing$.

06 **C**

Considere o paralelepípedo retângulo seguinte.



I. (V) Observe os planos paralelos (ABCD) e (EFGH) interceptados pelo plano (ABEH); as interseções são as retas **r** e **s**. Note que **r** e **s** estão contidas no mesmo plano (ABEH) e $r \cap s = \varnothing$; **r** e **s** são paralelas.

II. (F) Observe os planos paralelos (ABCD) e (EFGH). A reta $\overleftrightarrow{EF}$ está contida no plano (EFGH), a reta $\overleftrightarrow{AB} = r$ está contida no plano (ABCD) e, no entanto, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são reversas.

III. (F) Observe a reta $\overleftrightarrow{GH}$ paralela aos planos (ABCD) e (BCEF); esses planos são secantes e não paralelos.

IV. (V) Veja justificativa da afirmativa II.

07 **B**

O tetraedro (pirâmide de base triangular) tem 6 arestas. Considerando a aresta $\overline{AD}$, todas as outras arestas são concorrentes a $\overline{AD}$ (têm um plano em comum), exceto a aresta $\overline{BC}$ que é reversa a $\overline{AD}$. Tem-se, então, 3 pares de arestas reversas.

1º par: $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$

2º par: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

3º par: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

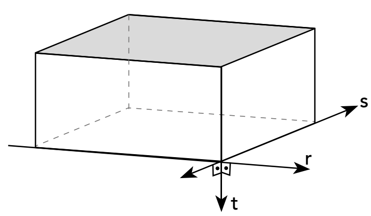
Outra solução: o par $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ é o mesmo par $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$; cada aresta apresenta apenas uma aresta reversa e são 6 arestas. São $6 \cdot 1 = 6$ pares, mas cada par foi contado duas vezes. Daí:

nº de pares = $\dfrac{6 \cdot 1}{2} = 3$

08 **C**

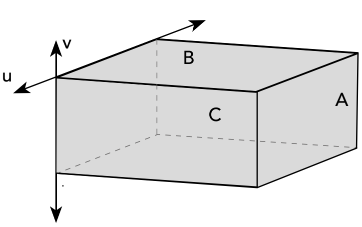
a) (F) Se os 3 pontos forem alinhados, os planos que os contêm podem ser secantes.

b) (F) Veja a figura do paralelepípedo seguinte. As retas **r** e **s** são perpendiculares a **t** e não são paralelas, mas concorrentes.



c) (V) É um dos casos de determinação do plano.

d) (F) Veja os planos A, B e C no paralelepípedo seguinte. Apesar de eles satisfazerem a condição, os planos A e B não são paralelos.



C: plano da face frontal
B: plano da face superior
A: plano da face à direita

e) (F) Veja as retas **u** e **v** paralelas ao plano A, na justificativa do item anterior.

09 **F, F, F, F, V**

(F) **r** e **s** não têm ponto comum; então **r** e **s** podem ser reversas.

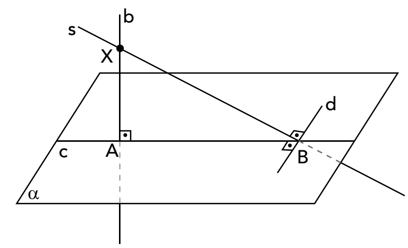
(F) Duas retas paralelas distintas sempre determinam um plano.

(F) Uma reta está contida em infinitos planos distintos.

(F) Três pontos não colineares determinam um plano.

(V)

10 **D**



Observe na figura que **d** é perpendicular ao plano (ABX); sai determinado pelas retas concorrentes **b** e **c**. Assim, **d** forma 90° com qualquer reta do plano (ABX), ou seja, **d** é perpendicular à reta **s**.